ESERCIZI - FASCICOLO 6

Esercizio 1. Sia X una v.a. uniforme sull'intervallo $(0,2)$ e sia $Y := X^2$. Calcolare la funzione di ripartizione F_Y e la sua densità f_Y.

Soluzione 1.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & 0 \le y < 4 \\ 1 & y \ge 4 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,4) \\ \frac{1}{4\sqrt{y}} & y \in (0,4) \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia X una v.a. continua con densità assegnata f_X,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ c\log(x) & x \in (0,1) \end{cases}$$

e si definisca $Y = -\log(X)$
(a) Quanto vale la costante c?
(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione F_Y.
(d) Calcolare la densità f_Y.

Soluzione 2. (a) $c = -1$.
(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(1-\log(x)) & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

(c)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y}(1+y) & y \ge 0 \end{cases}$$

(d)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ ye^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia X una v.a. aleatoria continua con densità f_X data da

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\alpha - x}{2} & 0 \le x < \alpha \\ 0 & \alpha \le x \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.
(a) Determinare α.
(b) Determinare la funzione di ripartizione F_X.
(c) Calcolare $\mathrm{E}[X]$.

(d)(Difficile) Sia Y una v.a. uniforme sull'intervallo $(0,1)$, trovare una funzione g da $(0,1)$ in $\mathbb{R}$ non decrescente tale che posto $Z = g(Y)$ si abbia $Z \sim X$ (cioè Z abbia la stessa densità di X).

Soluzione 3. (a) $\alpha = 2$
(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

(c) $\mathrm{E}[x] = \frac{2}{3}$
(d) $g(y) = 2 - \sqrt{4-4y}$ per ogni $y \in (0,1)$

Esercizio 4. L'altezza media, in centimetri, di un bambino di 7 mesi è una variabile aleatoria normale di parametri $\mu = 71$ e $\sigma^2 = 6.25$. Qual è la percentuale di bambini di 7 mesi che superano i 74 cemtimetri di altezza?

Soluzione 4. Sia X l'altezza, in centimetri, di un bambino di 7 mesi. $X \sim N(71, 6.25)$. Poiché

$$Z \equiv \frac{X - 71}{\sqrt{6.25}} \sim N(0,1),$$

si ha

$$P(X \geq 74) = P\left(Z \geq \frac{74-71}{\sqrt{6.25}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{74-71}{\sqrt{6.25}}\right)$$
$$= 1 - \Phi(1.2) \simeq 1 - 0.8849 = 0.1151.$$

Pertanto, circa l'11.5% dei bambini di 7 mesi supera i 74 centimetri di altezza.

Esercizio 5. Io prendo mediamente due raffreddori l'anno: il tempo tra la fine di un raffreddore e l'inizio del successivo ha distribuzione normale, con media 160 giorni e deviazione standard di 40 giorni.

i. Qual è la probabilità che rimanga 200 giorni o più senza un raffreddore?
ii. Qual è la probabilità che mi prenda un raffredore entro 80 giorni dalla guarigione dal precedente?

Soluzione 5. Sia $X =$ tempo che intercorre tra due raffreddori successivi $\sim N(160, 1600)$, e $Z := \frac{X-160}{40} \sim N(0,1)$.

i.
$$P(X \geq 200) = P(Z \geq 1) \simeq 0.158$$

ii.
$$P(X \leq 80) = P(Z \leq -2) \simeq 0.023$$

Esercizio 6. Il quoziente di intelligenza (IQ) nella popolazione ha distribuzione normale con media 100 e deviazione standard 15. Quale valore minimo di IQ bisogna avere per appartenere al 5% della popolazione con maggiore IQ?

Soluzione 6. Sia $X \sim N(100, 15^2)$, e x il valore cercato. Dev'essere

$$P(X > x) = 0.05.$$

Ma

$$P(X > x) = P\left(\frac{X-100}{15} > \frac{x-100}{15}\right) = P\left(Z > \frac{x-100}{15}\right),$$

dove $Z \sim N(0,1)$. Perciò dev'essere

$$\frac{x-100}{15} = \Phi^{-1}(0.95) \simeq 1.645 \;\Rightarrow\; x = 100 + 1.65 \times 15 = 124.67$$

Esercizio 7. L'altezza della popolazione femminile adulta degli Stati Uniti ha distribuzione normale di media 165 cm e deviazione standard 7.5 cm. È stato riscontrato che donne particolarmente alte vanno incontro a maggiori problemi dovuti all'osteoporosi, e quindi si propone l'adozione di uno *screening* preventivo.

a) Supponiamo che si decida di eseguire lo screening su tutte le donne di altezza superiore a 175 cm. A quale percentuale di popolazione femminile corrispondono?
b) Supponiamo che invece si decida di eseguire lo screening sul 5% più alto della popolazione femminile. Qual è l'altezza minima delle donne sottoposte a screening?

Soluzione 7. a) Sia $X \sim N(165, 7.5^2)$.

$$P(X \geq 175) = P\left(\frac{X-165}{7.5} \geq \frac{175-165}{7.5}\right) = P(Z \geq 1.33) = 1 - P(Z \leq 1.33) \simeq 0.092.$$

Pertanto le donne di altezza maggiore a 175 cm. corrispondono al 9.2% della popolazione.

b) Sia x tale altezza minima. Dev'essere $P(X > c) = 0.05$, cioè

$$P\left(Z > \frac{c-165}{7.5}\right) = 0.05 \;\Rightarrow\; \frac{c-165}{7.5} = \Phi^{-1}(0.95) = 1.65 \;\Rightarrow\; c \simeq 177.38.$$

Esercizio 8. Data una variabile aleatoria X con distribuzione uniforme in $(-\pi/2, \pi/2)$, si mostri che $Y := \cos(X)$ è una variabile continua e se ne determini la densità.

Soluzione 8. Per ipotesi $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$, quindi

$$\mathrm{P}(X \in A) = \int_{A\cap(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{|A \cap (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|}{\pi}.$$

Calcoliamo la funzione di distribuzione di Y. Chiaramente $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$ e $F_Y(y) = 1$ se $y > 1$, dal momento che $\cos(x) \in [0,1]$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Si noti che per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $y \in [0,1]$ si ha $\cos(x) \leq y$ se e solo se $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \frac{\pi}{2})$, quindi per ogni $y \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(\cos(X) \le y) \\
&= \mathrm{P}\big(X \in (-\tfrac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \tfrac{\pi}{2})\big) \\
&= \frac{|(-\frac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \frac{\pi}{2})|}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(y)\right).
\end{aligned}$$

Dato che la funzione F_Y è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$), segue che Y è continua, con densità

$$f_Y(y) = (F_Y)'(y) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathbb{1}_{(0,1)}(y).$$

Esercizio 9. Sia X un punto scelto uniformemente nell'intervallo $[0,2]$. Qual è la probabilità che il triangolo equilatero di lato X abbia area maggiore di 1?

Soluzione 9. L'area del triangolo equilatero di lato X vale $A := \frac{\sqrt{3}}{4}X^2$, pertanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A > 1) &= \mathrm{P}\left(X^2 > \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \mathrm{P}\left(X \in \left(-\infty, -\frac{2}{(3)^{1/4}}\right) \cup \left(\frac{2}{(3)^{1/4}}, +\infty\right)\right) \\
&= \int_{(-\infty, -\frac{2}{(3)^{1/4}}) \cup (\frac{2}{(3)^{1/4}}, +\infty)} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{(-\infty, -\frac{2}{(3)^{1/4}}) \cup (\frac{2}{(3)^{1/4}}, +\infty)} \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(0,2)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{(3)^{1/4}}\right) = 1 - 3^{-1/4} \simeq 0.24.
\end{aligned}$$

Esercizio 10. Sia $X \sim \mathrm{U}(0,1)$ e sia $Y := 4X(1-X)$.

(i) Si determini la funzione di distribuzione di Y, si deduca che la variabile Y è continua e se ne calcoli la densità.

Soluzione 10. (i) Chiaramente $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$ mentre $F_Y(y) = 1$ se $y > 1$, quindi basta concentrarsi sul caso $0 \le y \le 1$. In questo caso, la disequazione $4x(1-x) \le y$ ha come soluzioni $x \le \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-y})$ oppure $x \ge \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-y})$, pertanto

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}\left(X \le \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-y})\right) + \mathrm{P}\left(X \ge \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-y})\right).$$

Notiamo che $\mathrm{P}(X \le x) = x$ e $\mathrm{P}(X \ge x) = 1 - x$ se $x \in [0,1]$. Dato che i punti $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-y})$ sono nell'intervallo $[0,1]$ per $y \in [0,1]$, segue che

$$F_Y(y) = 1 - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-y}) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-y}) = 1 - \sqrt{1-y}.$$

In definitiva,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1 - \sqrt{1-y} & \text{se } y \in [0,1] \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}.$$

La funzione $F_Y(\cdot)$ è dunque continua e derivabile tranne che in due punti, e di conseguenza la variabile Y è continua. La sua densità è data da

$$f_Y(y) \;=\; F'_Y(y) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-y}}\,1_{(0,1)}(y)\,.$$

Esercizio 11. In un dato tratto di strada la velocità delle auto ha distribuzione normale con media 90 km/h e deviazione standard 10 km/h. Viene piazzato un rilevatore automatico di velocità, che viene "tarato" ad una velocità x: ciò significa che sarà inviata una multa ai proprietari delle auto la cui velocità è maggiore di x.

(a) Se $x = 105$, qual è la percentuale di auto a cui verrà data una multa?

(b) Quale deve essere il valore di x affinché la multa venga data al 2% delle auto?

Soluzione 11. Sia $X \sim N(90,100)$.

(a)

$$P(X > 105) = P\left(\frac{X-90}{10} > \frac{105-90}{10}\right) = 1-\Phi(1.5) \simeq 0.0668.$$

Verrà dunque data la multa al 6.68% delle auto.

(b) Dobbiamo trovare x in modo tale che

$$0.02 = P(X > x) = P\left(\frac{X-90}{10} > \frac{x-90}{10}\right) = 1-\Phi\left(\frac{x-90}{10}\right),$$

da cui

$$\frac{x-90}{10} = \Phi^{-1}(0.98) \simeq 2.05$$

cioè

$$x = 110.5.$$

Esercizio 12. Il livello di colesterolo nella popolazione maschile fra i 18 e i 24 anni è distribuito normalmente con media 178.1 Mg/dL, e deviazione standard 40.7.

(a) Qual è la percentuale di popolazione con livello di colesterolo superiore a 200?

(b) Si selezionano a caso 9 individui della popolazione, e si denota con X la media aritmetica dei loro livelli di colesterolo. Qual è la probabiltà che X sia compreso fra 170 e 180?

Soluzione 12. (a) $Y \sim N(178.1,(40.7)^2)$.

$$\begin{aligned} P(Y > 200) = P&\left(\frac{Y-178.1}{40.7} > \frac{200-178.1}{40.7}\right) \\ &= P(N(0,1) > 0.538) = 1-\Phi(0.538) \simeq 0.295. \end{aligned}$$

Quindi circa il 29.5% della popolazione ha livello di colesterolo maggiore di 200.

(b) Per un risultato che vedremo tra qualche lezione, $X \sim N\left(178.1, \frac{(40.7)^2}{9}\right)$. Quindi:

$$P(170 < X < 180) = P\left(\frac{170-178.1}{40.7/3} < \frac{X-178.1}{40.7/3} < \frac{180-178.1}{40.7/3}\right)$$
$$= \Phi(0.14) - \Phi(0.597) \simeq\simeq 0.28.$$

Esercizio 13. In un gioco d'azzardo si vincono due Euro in caso di successo, e si perde un Euro in caso di insuccesso. La probabilità di successo è $p = 0.4$.

(a) Sia X il numero di successi in n ripetizioni del gioco. Qual è la densità di X?

(b) Sia Y il numero (relativo) di Euro vinti in n ripetizioni del gioco. Dopo aver determinato una relazione che lega X e Y, si determini media e varianza di Y.

(c) Si calcoli approssimativamente la probabilità di vincere almeno 50 Euro in 220 ripetizioni del gioco.

(d) Quante volte, come minimo, è necessario ripetere il gioco affinché la probabilità di vincere almeno 50 Euro sia maggiore di 0.99?

Soluzione 13. (a) $X \sim B(n, p)$.

(b) $Y = 2X - (n - X) = 3X - n$, per cui

$$E(Y) = 3np - n = 0.2n$$

$$Var(Y) = 9Var(X) = 9np(1-p) = 2,16n$$

(c) Abbiamo che $Y \geq 50$ se e solo se $X \geq 90$. Usando l'approssimazione normale per una binomiale (notando che $\min(np, n(1-p)) = 220 \cdot 0.4 > 5$) con la correzione di continuità

$$P(X \geq 90) = P(X > 89.5) = P\left(\frac{X - 220\cdot 0.4}{\sqrt{220\cdot 0.4\cdot 0.6}} > \frac{89.5 - 220\cdot 0.4}{\sqrt{220\cdot 0.4\cdot 0.6}}\right)$$
$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{89.5 - 220\cdot 0.4}{\sqrt{220\cdot 0.4\cdot 0.6}}\right) \simeq 0.4182.$$

Esercizio 14. Una compagnia aerea rileva che il tempo di percorrenza X di una certa tratta ha distribuzione Normale, con una media di 93 minuti e una deviazione standard di 8 minuti.

(a) Qual è la probabilità che un dato volo impieghi oltre 105 minuti per percorrere la tratta?

(b) La compagnia vuole pubblicare un tempo "ufficiale" di percorrenza in modo tale che, su un gran numero di voli, il 99% impieghi meno di questo tempo "ufficiale". Quale deve essere il valore del tempo "ufficiale" di percorrenza?

(c) Qual è la probabilità che su 10 voli almeno uno abbia un tempo di percorrenza maggiore di quello "ufficiale"? (Si assuma che voli diversi abbiano tempi di percorrenza indipendenti)

Soluzione 14. (a) $X \sim N(93, 64)$.

$$P(X > 105) = P\left(\frac{X-93}{8} > \frac{105-93}{8}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - \Phi(1.5) \simeq 0.0668$$

(b)

$$0.99 = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-93}{8}\right) \;\Rightarrow\; x = 93 + 8\Phi^{-1}(0.99) \simeq 111.64$$

(c) $1 - (0.99)^{10}$.

Esercizio 15. Nella specie chiamata "trifoglio bianco " il 99.99 % degli esemplari ha effettivamente tre foglie, gli altri ne hanno 4 (in realtà alcuni ne hanno più di 4, ma qui lo ignoriamo).

(a) Raccolgo in modo casuale 10000 esemplari. Calcolare approssimativamente la probabilità che almeno uno sia un quadrifoglio.
(b) In un campo sono presenti 200000 esemplari. Qual è la probabilità che il numero di quadrifogli sia almeno 22?

(*Sugg:* per ognuno dei due casi individuare l'opportuno metodo di approssimazione)

Soluzione 15. (a) Sia X il numero di quadrifogli su 10000 esemplari. $X \sim B(n, p)$, con $n = 10000$ e $p = \frac{1}{10000}$. Poiché $np = 1$ e np^2 è molto piccolo, usiamo l'approssimazione di Poisson:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \simeq 1 - P(Po(1) = 0) = 1 - e^{-1}.$$

(b) Sia X il numero di quadrifogli su 200000 esemplari. $X \sim B(n, p)$, con $n = 200000$ e $p = \frac{1}{10000}$. Poiché $np = 20$, usiamo l'approssimazione normale (con la correzione di continuità):

$$P(X \geq 22) = P(X \geq 21.5) = P\left(\frac{X-20}{\sqrt{200000}\sqrt{\frac{1}{10000}\left(1-\frac{1}{10000}\right)}} \geq \frac{21.5-20}{\sqrt{200000}\sqrt{\frac{1}{10000}\left(1-\frac{1}{10000}\right)}}\right)$$
$$\simeq P(N(0,1) \geq 0.335) = 1 - P(N(0,1) \leq 0.335) \simeq 0.37.$$

Esercizio 16. Nella battitura di un testo, ogni carattere viene sbagliato con probabilità 0.005, indipendentemente dagli altri. Un articolo contiene 2500 caratteri. Usando l'approssimazione normale, calcolare la probabilità che nell'articolo ci siano oltre 15 errori.

Soluzione 16. Se X è il numero di errori, X è binomiale di parametri $n = 2500$ e $p = 0.005$. Essendo $2500 \times 0.005 > 5$, è lecito usare l'approssimazione normale. Allora, usando anche la correzione di continuità,

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15.5) = 1 - P\left(\frac{X - 2500 \cdot 0.005}{\sqrt{2500 \cdot 0.005 \cdot 0.995}} \leq \frac{15.5 - 2500 \cdot 0.005}{\sqrt{2500 \cdot 0.005 \cdot 0.995}}\right)$$
$$\simeq 1 - P(N(0,1) \leq 0.85) = 1 - \Phi(0.85) \simeq 0.197.$$

Esercizio 17. Un test a risposta multipla consiste di 100 domande, che prevedono 4 possibili risposte delle quali solo una è corretta (come nella prima parte di questo esame) . Uno studente risponde a caso a tutte le domande del test. Si calcoli

(a) la media e la varianza del numero di risposte corrette che egli fornisce;

(b) la probabilità che il numero di risposte corrette sia compreso tra 20 e 30 (impiegando l'approssimazione normale).

Soluzione 17. **(a)**. Sia X il numero di risposte corrette. Si ha $X \sim B(100, 0.25)$ (cioè è binomiale di parametri 100 e 0.25), per cui $E(X) = 25$, $Var(X) = 100 \times 0.25 \times 0.75 = 18.75$.
(b). Per l'approssimazione normale, $\frac{X-25}{\sqrt{18.75}}$ ha distribuzione approssimativamente $N(0,1)$. Pertanto, usando anche la correzione di continuità,

$$P(20 \leq X \leq 30) = P(X \leq 30) - P(X < 20) = P(X \leq 30.5) - P(X \leq 19.5)$$
$$\simeq P\left(N(0,1) \leq \frac{30.5 - 25}{\sqrt{18.75}}\right) - P\left(N(0,1) \leq \frac{19.5 - 25}{\sqrt{18.75}}\right)$$
$$= \Phi(1.27) - \Phi(-1.27) = 2\Phi(1.27) - 1 = 0,796$$

Esercizio 18. In una elezione votano un milione di persone, che devono scegliere tra i due candidati A e B. Il voto di un certo numero n di elettori è sotto il controllo di una organizzazione malavitosa, che garantisce che essi votino per il candidato A. Tutti gli altri elettori votano "a caso", scegliendo con ugual probabilità i due candidati, ognuno indipendentemente dagli altri.

(i) Supponiamo che l'organizzazione malavitosa controlli $n = 2\,000$ voti. Qual è la probabilità (approssimata) che il candidato A vinca le elezioni?

(ii) Qual è il numero minimo n di individui che l'organizzazione malavitosa deve controllare, per garantire che la probabilità di vittoria di A sia almeno del 99%?

Soluzione 18. (i) Sia X il numero di voti ricevuti da A tra i $998\,000$ elettori non controllati. Notare che $X \sim B(998\,000, 1/2)$. Il candidato A vince se $X > 498\,000$. Usando l'approssimazione normale (dati i numeri elevati la correzione di continuità non è rilevante)

$$P(X > 498\,000) = P\left(\frac{X - 499\,000}{\frac{1}{2}\sqrt{998\,000}} > -\frac{1\,000}{\frac{1}{2}\sqrt{998\,000}}\right) \simeq \Phi(2) = 0.977.$$

(ii) Se X è il numero di voti ricevuti da A tra i $1\,000\,000 - n$ elettori non controllati, si ha $X \sim B(1\,000\,000 - n, 1/2)$. Il candidato A vince se $X > 500000 - n$, per cui procedendo come sopra

$$P(X > 500\,000 - n) = P\left(\frac{X - \frac{1\,000\,000-n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000\,000-n}} > -\frac{n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000\,000-n}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{n}{\sqrt{1\,000\,000-n}}\right).$$

Quindi deve essere $\frac{n}{\sqrt{1\,000\,000-n}} > \Phi^{-1}(0.99) \simeq 2.33$. Elevando al quadrato e risolvendo, si trova $n \geq 2333$.

Esercizio 19. Una compagnia aerea offre ai sui passeggeri la scelta fra due tipi di snack: salatini o biscotti. Sulla base della passata esperienza, la compagnia ritiene che le due scelte siano equiprobabili. Supponiamo che in un dato volo ci siano 150 passeggeri, che scelgono ognuno indipendentemente dagli altri. Si calcoli, in modo approssimato,

(a) la probabilità che almeno 60 passeggeri scelgano i salatini;

(b) se a bordo ci sono 90 unità di ognuno dei due tipi di snack, la probabilità che qualche passeggero non possa avere lo snack che desidera.

Soluzione 19. Sia X il numero dei passeggeri che scelgono i salatini. Allora $X \sim B(150, 1/2)$. È lecito usare l'approssimazione normale poiché $150 \cdot \frac{1}{2} > 5$.

(a) Usando anche la correzione di continuità

$$P(X \geq 60) = P(X \geq 59.5) = P\left(\frac{X-75}{\sqrt{37.5}} \geq \frac{59.5-75}{\sqrt{37.5}}\right) \simeq 1 - \Phi(2.53) \simeq 0.9943.$$

(b) Qualche passeggero non avrà lo snack che desidera se $X > 90$ oppure $X < 60$. Per simmetria

$$\begin{aligned} P(X > 90 \text{ o } X < 60) &= P(X > 90) + P(X < 60) = 2P(X < 60) = 2(1 - P(X \geq 60)) \\ &\simeq 2(1 - 0.9943) = 0.0114. \end{aligned}$$

Esercizio 20. Una banca presta per un anno ad un'azienda un capitale C. Dopo un anno l'azienda deve restituire la somma $(1+r)C$, dove r è il tasso di interesse. C'è però una piccola probabilità, che denoteremo con p, che l'azienda fallisca, e non sia pertanto in grado di restituire alcunché. Perciò, se X è una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro $1-p$, la somma incassata dalla banca è $Y = (1+r)CX$.

(a) Supponiamo il valore di p sia noto. Quale deve essere il valore di r affinché $E(Y) = C$, cioè il tasso di interesse serva esattamente a compensare in media il fattore di rischio?

(b) Supponiamo ora $p = 0.05$, $C = 1$, e sia r il valore calcolato al punto precedente. La banca eroga lo stesso prestito a 100 diverse aziende, i cui eventuali fallimenti avvengono indipendentemente gli uni dagli altri. Calcolare approssimativamente la probabilità che la somma incassata dalla banca dopo un anno sia minore o uguale a 95.

Soluzione 20. (a) Abbiamo

$$E(Y) = (1+r)C(1-p) = C \iff r = \frac{p}{1-p}.$$

(b) Abbiamo $(1+r)=\frac{1}{1-p}=\frac{20}{19}$. Sia Y_i la somma incassata dall'i-ma azienda. $E(Y_i)=1, Var(Y_i)=(1+r)^2p(1-p)=\frac{1}{19}$. Usando l'approssimazione normale con la correzione di continuità, detta $S=Y_1+\cdots+Y_{100}$ la somma incassata dalla banca,

$$P(S\leq 95)=P(S\leq 95.5)=P\left(\frac{S-100}{\sqrt{100/19}}\leq\frac{95.5-100}{\sqrt{100/19}}\right)\simeq 1-\Phi(1.96)\simeq 0.025.$$

Esercizio 21. Un giocatore di pallacanestro ha una percentuale di successo nei tiri da tre punti del 20%. Calcolare:

a. la probabilità che in 100 tiri faccia non più di 54 punti;

b. il numero minimo di tiri che deve effettuare per realizzare almeno 57 punti con probabilità maggiore o uguale a 0.95.

Soluzione 21. a. Sia X il numero di canestri realizzati su 100 tiri. Si ha $X\sim B(100,0.2)$. Poichè realizzare non più di 54 punti significa realizzare non più di 18 canestri, le probabilità da calcolare è

$$P(X\leq 18)=P(X\leq 18.5)\simeq P\left(Z\leq\frac{18.5-20}{\sqrt{100\cdot 0.2\cdot 0.8}}\right)\simeq\Phi(-0.375)\simeq 0.3538$$

Notare che è lecito applicare l'approssimazione normale, essendo $100\cdot 0.2=20>5$.

b. Poichè realizzare almeno 57 punti significa realizzare almeno 19 canestri, si vuole che sia, per $X\sim B(n,0.2)$

$$P(X\geq 19)=P(X>18.5)=P\left(Z\geq\frac{18.5-0.2n}{n\cdot 0.2\cdot 0.8}\right)\simeq 1-\Phi\left(\frac{18.5-0.2n}{0.4\sqrt{n}}\right)\geq 0.95,$$

cioè

$$-\frac{18.5-0.2n}{0.4\sqrt{n}}\geq 1.64\ \Leftrightarrow\ 0.2\cdot n-0.784\sqrt{n}-18.5\geq 0\ \Leftrightarrow\sqrt{n}\geq 11.775\ \Leftrightarrow n\geq 139.$$

A posteriori, essendo $136\cdot 0.2>5$, verifichiamo che era lecito usare l'approssimazione normale.

Esercizio 22. Il gruppo promotore di un referendum ritiene che il 60% della popolazione sia disposta a firmare per la relativa raccolta di firme. Si assuma che le persone a cui viene richiesto di firmare siano scelte a caso. Dovendo raccogliere 30.000 firme, quante persone è necessario interpellare affinchè la soglia delle 30.000 firme sia raggiunta con probabilità di almeno $0,95$?

Soluzione 22. Sia X il numero di firme raccolte interpellando n persone. Abbiamo $X\sim B(n,0.6)$ La probabilità in esame è, allora, usando l'approssimazione normale (ovviamente lecita),

$$P(X\geq 30000)\simeq P\left(Z\geq\frac{29999.5-0.6n}{\sqrt{n\cdot 0.6\cdot 0.4}}\right)\simeq P\left(Z\geq\frac{29999.5-0.6n}{\sqrt{n\cdot 0.6\cdot 0.4}}\right)$$

$$\simeq 1-\Phi\left(\frac{29999.5-0.6n}{\sqrt{n\cdot 0.6\cdot 0.4}}\right)=\Phi\left(\frac{0.6n-29999.5}{\sqrt{n\cdot 0.6\cdot 0.4}}\right).$$

Richiedendo che tale probabilità sia maggiore o uguale a 0.95, si ottiene:

$$\frac{0.6n-29999.5}{\sqrt{n\cdot 0.6\cdot 0.4}}\geq \Phi^{-1}(0.95)\simeq 1.64$$

che equivale a

$$0.6n-0.8\sqrt{n}-29999.5\geq 0$$

da cui

$$n\geq 50300.$$

Esercizio 23. Per una certa specie africana di uccelli, i neonati hanno – indipendentemente l'uno dal l'altro – una probabilità di sopravvivere al primo mese pari a $1/7$. Quelli che sopravvivono al primo mese hanno una probabilità pari a $1/3$ di superare l'anno.

(i) Qual è la probabilità che un neonato sopravviva al primo anno?
(ii) Se un neonato muore entro il primo anno, qual è la probabilità che sia sopravvissuto al primo mese?
(iii) Si determini approssimativamente il numero minimo n di neonati da monitorare affinché la probabilità che ne sopravvivano almeno 30 dopo un mese sia almeno 0.95.

Soluzione 23. (i) Introducendo gli eventi $A :=$ "il neonato sopravvive al primo mese" e $B :=$ "il neonato sopravvive al primo anno", i dati del problema ci dicono che

$$P(A) = \frac{1}{7}, \qquad P(B|A) = \frac{1}{3}.$$

Di conseguenza, per il teorema delle probabilità totali,

$$P(B) = P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{3}\frac{1}{7} = \frac{1}{21},$$

dove si è usato il fatto che $P(B|A^c)=0$, perché $B\subseteq A$.

(ii) Per la formula di Bayes

$$P(A|B^c) = \frac{P(B^c|A)P(A)}{P(B^c)} = \frac{(1-\frac{1}{3})\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{21}} = \frac{1}{10}.$$

(iii) Dati n neonati, il numero di questi che sopravvive dopo un mese è una variabile casuale X con distribuzione $B(n,p)$, con $p=\frac{1}{7}$. Applicando l'approssimazione normale e la correzione di continuità, si ottiene

$$P(X\geq 30) = P(X\geq 29.5) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\geq\frac{29.5-\frac{1}{7}n}{\sqrt{n\frac{1}{7}(1-\frac{1}{7})}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{n\frac{1}{7}-29.5}{\sqrt{n}\sqrt{6}/7}\right).$$

Dato che $\Phi(z) \geq 0.95$ se e solo se $z \geq \Phi^{-1}(0.95) \simeq 1.64$, si ottiene la disequazione

$$\frac{n\frac{1}{7} - 29.5}{\sqrt{n}\sqrt{6}/7} \;\geq\; 1.64 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 - 1.64\sqrt{6}\sqrt{n} - 29.5 \cdot 7 \;\geq\; 0\,.$$

Le soluzioni positive sono date da $\sqrt{n} \geq 16.52$, cioè $n \geq 273$.