ESERCIZI - FASCICOLO 7

Esercizio 1. Siano $X, Y \sim Be(p)$ indipendenti, con $p \in (0,1)$. Mostrare che le variabili casuali $X+Y$ e $X-Y$ sono scorrelate (cioè $Cov(X,Y) = 0$) ma non indipendenti.

Esercizio 2. Date n prove ripetute e indipendenti con probabilità di successo p, consideriamo le variabili aleatorie $S :=$ "numero di successi nelle n prove" e $T :=$ "prova in cui si ha il primo successo". Si determini la densità congiunta $\mathrm{p}_{S,T}$.

Esercizio 3. Due variabili aleatorie X e Y sono definite nel modo seguente, sulla base dei risultati di tre lanci indipendenti di una moneta equilibrata. Se al primo lancio esce testa, poniamo $X = Y = 0$. Se esce croce sia al primo che al secondo lancio, poniamo $X = 1$, mentre se viene croce al primo lancio e testa al secondo poniamo $X = -1$. Similmente, se viene croce al primo e al terzo lancio poniamo $Y = 1$, mentre se viene croce al primo lancio e testa al terzo, poniamo $Y = -1$. Si determini la densità congiunta di X e Y, mostrando che sono variabili aleatorie scorrelate (cioè $Cov(X,Y) = 0$) ma non indipendenti.

Esercizio 4. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, entrambe a valori in $\{1, 2, \ldots, n\}$, tali che $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(Y = k) = \frac{1}{n}$ per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$. Si calcoli la densità di $X+Y$.

Esercizio 5. Un insetto depone un numero aleatorio $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ di uova. Ciascun uovo deposto si schiude con probabilità $p \in (0,1)$, indipendentemente dal numero di uova deposte e dal fatto che le altre si schiudano. Indichiamo con X il numero (aleatorio) di uova che si schiudono.

(i) Qual è il valore di $\mathrm{P}(X = k \,|\, N = n)$, per $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{R}$?

(ii) Si determini la distribuzione di X.

Esercizio 6. Siano X e Y due variabili aleatorie a valori in $\mathbb{N}_0$ aventi la seguente densità congiunta:

$$\mathrm{p}_{X,Y}(k,n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $p \in (0,1)$ e $\lambda > 0$ sono parametri fissati. Si determinino le densità marginali di X e Y e si calcoli $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Esercizio 7. Elena lancia ripetutamente una moneta. La probabilità di ottenere testa vale $p \in (0,1)$. Detto $X_k \in \{0,1\}$ l'esito dell'k-esimo lancio (testa = 1, croce = 0), indichiamo con S, T rispettivamente il primo e secondo istante in cui esce testa:

$$S := \min\{k \in \mathbb{N} : X_k = 1\}, \quad T := \min\{k \in \mathbb{N}, k > S : X_k = 1\},$$

con la convenzione $\min \emptyset := +\infty$. Poniamo quindi

$$U := T - S$$

e definiamo infine per $k \in \mathbb{N}$ gli eventi

$$A_k := \{X_k = 1\}.$$

(i) Fissiamo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$. Si esprima l'evento $\{S = m, T = n\}$ in funzione degli eventi $A_1, \ldots, A_n$ mediante opportune operazioni insiemistiche. Si deduca quindi la densità congiunta

$$\mathrm{p}_{S,T}(m,n) = \mathrm{P}(S = m, T = n) = (1-p)^{n-2} p^2 \, \mathbb{1}_{\{1 \le m < n\}}.$$

(ii) Si determini la densità congiunta delle variabili aleatorie S, U. Si deduca che S e U sono indipendenti e hanno la stessa distribuzione marginale (quale?).

(iii) Si calcolino $\mathrm{E}(T)$ e $\mathrm{Var}(T)$.

Esercizio 8. Il piatto di una roulette contiene i numeri da 0 a 36. Consideriamo due possibili puntate: A) quella sui numeri pari: si vince se esce un numero pari tra 2 e 36, e in questo caso si riceve il doppio del capitale puntato (quindi si resta in attivo di una quantità uguale al capitale puntato); B) quella sulla prima dozzina: si vince se esce un numero tra 1 e 12, e in questo caso si riceve il triplo del capitale puntato (quindi si resta in attivo del doppio del capitale puntato).

Supponiamo di puntare contemporaneamente due Euro sui numeri pari, e un Euro sulla prima dozzina. Sia X il bilancio della giocata (capitale finale - capitale iniziale).

a) Determinare la densità di X e $E(X)$.

b) Si considerino le seguenti variabili casuali:

$$Y = \begin{cases} 1 \text{ se esce un numero pari} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 \text{ se esce un numero della prima dozzina} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $Cov(Y, Z)$.

c) Dopo aver espresso X come funzione di Y e Z, calcolare $E(X)$ e $Var(X)$ senza usare la densità calcolata in a).

Esercizio 9. In un'urna vi sono r palline rosse e v palline verdi. Estraggo in successione due palline, senza reintroduzione. Per $i = 1, 2$, sia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-ma pallina è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare il coefficente di correlazione tra X_1 e X_2.

Esercizio 10. Stefano lancia ripetutamente un dado regolare a sei facce. Indichiamo con X_k il risultato dell'k-esimo lancio, per $k \in \mathbb{N}$. Matteo sta a guardare gli esiti dei lanci, aspettando il primo istante T in cui esce un numero in $\{1,2,3,4,5\}$. Quando ciò accade, si appunta su un foglio il numero uscito $Y := X_T$.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si esprima l'evento $\{T = n\}$ in termini delle variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n$. Si deduca quindi la densità discreta di T e la si riconosca.

(ii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \{1,2,3,4,5\}$, si esprima l'evento $\{T = n, Y = a\}$ in termini delle variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n$. Si deduca quindi la densità discreta congiunta delle variabili aleatorie T e Y.

(iii) Si determini la distribuzione di Y. Le variabili T e Y sono indipendenti?

Esercizio 11. In un certo spazio campionario Ω si considerino due eventi A e B, e le variabili aleatorie

$$X = \mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 \text{ se si verifica } A \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$Y = \mathbf{1}_B = \begin{cases} 1 \text{ se si verifica } B \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare la covarianza $Cov(X,Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X,Y)$ in termini di $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

(b) Si determini la varianza $Var(X+Y)$ nei casi in cui $B = A$ e $B = A^c$.

Esercizio 12. Sia

$$f(x,y) = e^{-x-y}.$$

Si calcoli

$$\int\int_B f(x,y)dxdy$$

per le seguenti scelte di B:

(a) $B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\}$.

(b) $B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y < +\infty\}$.

(c) $B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y < +\infty\}$.