

Abbiamo "definito" gli integrali di funzioni di due
(o più) variabili

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$$

In particolare, se $B \subseteq \mathbb{R}^2$, $\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) 1_B(x, y) dx dy$

dove $1_B(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Definizione Siano X e Y due v.a. definite sullo stesso spazio campionario. Diciamo che esse sono congiuntamente continue, oppure che il vettore (X, Y) è continuo, se esiste una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ tale che $\forall B \subseteq \mathbb{R}^2$

$$P((X, Y) \in B) = \iint_B f(x, y) dx dy$$

La funzione f si dice densità congiunta di X e Y e spesso verrà denotata con $f_{X,Y}$

Siano X e Y congiuntamente continue con densità
congiunta $f_{X,Y}$

$$F_X(z) = P(X \leq z) = P((X, Y) \in (-\infty, z] \times \mathbb{R}) =$$

$$\iint_{(-\infty, z] \times \mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y) \mathbb{1}_{(-\infty, z] \times \mathbb{R}}(x, y) dx dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y) \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{(-\infty, z]}(x) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \right]}_{\varphi(x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx \quad \text{dove} \quad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y) dy$$

$$\stackrel{!}{=} P(X \leq z)$$

$\Rightarrow X$ è continua e la sua densità f_X è data da

$$\left[f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y) dy \right]$$

Analogamente:

$$\left[f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y) dx \right]$$

In generale, se X e Y sono due variabili continue, non è detto che siano congiuntamente continue.

Ad esempio, se X è una v.e. continua e $Y = X$, allora X e Y NON sono congiunt. continue.

Teorema 1) Siano X e Y v.a. congiuntamente continue. X e Y sono indipendenti se e solo se

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

2) Se X e Y sono due v.a. continue e sono indipendenti, allora sono congiuntamente continue e

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Teorema Siano X e Y v.a. congiuntamente
continue, con dens. conj. $f_{X,Y}$

Sia inoltre $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$E[g(X,Y)] = \iint g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

Ricordiamo che se X è una v.a. continua e $a \neq 0$,
definite $Y = aX$, anche Y è continua.

$$\text{Se } a > 0: F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX \leq y) = P(X \leq \frac{y}{a}) = F_X(\frac{y}{a})$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{a} F_X'(\frac{y}{a}) = \frac{1}{a} f_X(\frac{y}{a})$$

$$\text{Se } a < 0: F_Y(y) = P(X \geq \frac{y}{a}) = 1 - F_X(\frac{y}{a})$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = -\frac{1}{a} f_X(\frac{y}{a})$$

Riassumendo, se $a \neq 0$ $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y}{a}\right)$

Consideriamo l'analogo bi-dimensionale di questo esempio.

Siano X e Y v.a. congiuntamente continue.

Sia A una matrice 2×2 . Definiamo le v.a. Z e W come segue

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Teorema se A è una matrice invertibile

allora Z e W sono congiuntamente continue
e

$$\rho_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{|\det(A)|} \rho_{X,Y}\left(A^{-1}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)$$

Siano X e Y v.a. congiuntamente continue.

Qual è la densità di $X+Y$?

Definiamo $Z = X+Y$ e $W = Y$

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_{z,w}(z,w) = \frac{1}{|\det A|} f_{x,y}(A^{-1} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}) = f_{x,y}(z-w, w)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{z,w}(z,w) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(z-w, w) dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(w, z-w) dw \end{aligned}$$