ESERCIZI - FASCICOLO 7

Esercizio 1. Siano $X,Y \sim Be(p)$ indipendenti, con $p \in (0,1)$. Mostrare che le variabili casuali $X+Y$ e $X-Y$ sono scorrelate (cioè $Cov(X,Y)=0$) ma non indipendenti.

Soluzione 1.

$$Cov(X+Y,X-Y) = Var(X) - Var(Y) = 0,$$

ma, ad esempio

$$P(X+Y=0, X-Y=1) = 0 \neq P(X+Y=0)P(X-Y=1).$$

Esercizio 2. Date n prove ripetute e indipendenti con probabilità di successo p, consideriamo le variabili aleatorie $S :=$ "numero di successi nelle n prove" e $T :=$ "prova in cui si ha il primo successo". Si determini la densità congiunta $\mathrm{p}_{S,T}$.

Soluzione 2. L'evento $\{S=s,\, T=t\}$ si può esprimere come intersezione dei tre eventi corrispondenti alle seguenti affermazioni:

- le prime $t-1$ prove sono stati insuccessi;
- la prova t-esima è stata un successo;
- nelle rimanenti $n-t$ prove vi sono stati $s-1$ successi.

Data l'indipendenza di prove distinte, i tre eventi precedenti sono indipendenti. Ne segue che

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_{S,T}(s,t) = \mathrm{P}(S=s,\, T=t) &= (1-p)^{t-1} p \binom{n-t}{s-1} p^{s-1} (1-p)^{n-t-(s-1)} \\
&= \binom{n-t}{s-1} p^s (1-p)^{n-s},
\end{aligned}$$

con la convenzione $\binom{N}{K} \neq 0$ se e solo se $0 \leq K \leq N$.

Esercizio 3. Due variabili aleatorie X e Y sono definite nel modo seguente, sulla base dei risultati di tre lanci indipendenti di una moneta equilibrata. Se al primo lancio esce testa, poniamo $X=Y=0$. Se esce croce sia al primo che al secondo lancio, poniamo $X=1$, mentre se viene croce al primo lancio e testa al secondo poniamo $X=-1$. Similmente, se viene croce al primo e al terzo lancio poniamo $Y=1$, mentre se viene croce al primo lancio e testa al terzo, poniamo $Y=-1$. Si determini la densità congiunta di X e Y, mostrando che sono variabili aleatorie scorrelate (cioè $Cov(X,Y)=0$) ma non indipendenti.

Soluzione 3. Indichiamo con C_i l'evento che esca croce al lancio i-esimo. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_{X,Y}(0,0) &= \mathrm{P}(C_1^c) = \frac{1}{2} \\
\mathrm{p}_{X,Y}(1,1) &= \mathrm{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = \frac{1}{8} \\
\mathrm{p}_{X,Y}(1,-1) &= \mathrm{P}(C_1 \cap C_2 \cap C_3^c) = \frac{1}{8} \\
\mathrm{p}_{X,Y}(-1,1) &= \mathrm{P}(C_1 \cap C_2^c \cap C_3) = \frac{1}{8} \\
\mathrm{p}_{X,Y}(-1,-1) &= \mathrm{P}(C_1 \cap C_2^c \cap C_3^c) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_X(0) &= \frac{1}{2} \\
\mathrm{p}_X(1) &= \mathrm{p}_{X,Y}(1,1) + \mathrm{p}_{X,Y}(1,-1) = \frac{1}{4} \\
\mathrm{p}_X(-1) &= \mathrm{p}_{X,Y}(-1,1) + \mathrm{p}_{X,Y}(-1,-1) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

e, per simmetria, $\mathrm{p}_X = \mathrm{p}_Y$. In particolare $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) &= \sum_{x,y} xy\, \mathrm{p}_{X,Y}(x,y) \\
&= \mathrm{p}_{X,Y}(1,1) + \mathrm{p}_{X,Y}(-1,-1) - \mathrm{p}_{X,Y}(1,-1) - \mathrm{p}_{X,Y}(-1,1) = 0,
\end{aligned}$$

quindi X e Y sono scorrelate. Tuttavia X e Y non sono indipendenti, perché

$$\mathrm{P}(X=0, Y=0) = \mathrm{p}_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \mathrm{p}_X(0)\,\mathrm{p}_Y(0) = \mathrm{P}(X=0)\,\mathrm{P}(Y=0)\,.$$

Esercizio 4. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, entrambe a valori in $\{1,2,\dots,n\}$, tali che $\mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(Y=k) = \frac{1}{n}$ per ogni $k = 1,2,\dots,n$. Si calcoli la densità di $X+Y$.

Soluzione 4. In questo caso abbiamo

$$\mathrm{p}_X = \mathrm{p}_Y = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\{1,2,\dots,n\}}.$$

Pertanto

$$\mathrm{p}_{X,Y}(k) = \mathrm{p}_X * \mathrm{p}_Y(k) = \frac{1}{n^2} \sum_h \mathbb{1}_{\{1,2,\dots,n\}}(h) \mathbb{1}_{\{1,2,\dots,n\}}(k-h).$$

Notando che

$$\mathbb{1}_{\{1,2,\dots,n\}}(h) \mathbb{1}_{\{1,2,\dots,n\}}(k-h) = \begin{cases} \mathbb{1}_{\{1,2,\dots,k-1\}}(h) & \text{se } 2 \le k \le n \\ \mathbb{1}_{\{k-n,k-n+1,\dots,n\}}(h) & \text{se } n < k \le 2n, \end{cases}$$

si ha

$$\mathrm{p}_{X,Y}(k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{se } 2 \le k \le n \\ \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{se } n < k \le 2n. \end{cases}$$

Esercizio 5. Un insetto depone un numero aleatorio $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ di uova. Ciascun uovo deposto si schiude con probabilità $p \in (0,1)$, indipendentemente dal numero di uova deposte e dal fatto che le altre si schiudano. Indichiamo con X il numero (aleatorio) di uova che si schiudono.

(i) Qual è il valore di $\mathrm{P}(X = k \,|\, N = n)$, per $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{R}$?

(ii) Si determini la distribuzione di X.

Soluzione 5. Per ipotesi

$$\mathrm{P}(X = k|N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{per } \ k \in \{0, \ldots, n\}\,.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ si ha dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = k) &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{P}(X = k|N = n)\,\mathrm{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\, \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda}\, \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-p\lambda}\, \frac{(p\lambda)^k}{k!} \end{aligned}$$

cioè $X \sim \mathrm{Pois}(p\lambda)$.

Esercizio 6. Siano X e Y due variabili aleatorie a valori in $\mathbb{N}_0$ aventi la seguente densità congiunta:

$$\mathrm{p}_{X,Y}(k,n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!} & \text{se } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $p \in (0,1)$ e $\lambda > 0$ sono parametri fissati. Si determinino le densità marginali di X e Y e si calcoli $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Soluzione 6. Si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_X(k) &= e^{-\lambda}\, \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n \ge k} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-p\lambda}\, \frac{(p\lambda)^k}{k!} \\ \mathrm{p}_Y(n) &= e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!} \end{aligned}$$

quindi $X \sim \mathrm{Pois}(p\lambda)$ e $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Inoltre

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_{n,k=0}^{+\infty} kn\, p_{X,Y}(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_Y(n) \sum_{k=0}^{n} k p_{\mathrm{Bin}(n,p)}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_Y(n)\,(pn) = p\,\mathrm{E}(Y^2) = p(\lambda+\lambda^2)\,,\end{aligned}$$

da cui $\mathrm{Cov}(X,Y) = p\lambda$.

Esercizio 7. Elena lancia ripetutamente una moneta. La probabilità di ottenere testa vale $p \in (0,1)$. Detto $X_k \in \{0,1\}$ l'esito dell'k-esimo lancio (testa = 1, croce = 0), indichiamo con S,T rispettivamente il primo e secondo istante in cui esce testa:

$$S := \min\{k \in \mathbb{N} :\ X_k = 1\}\,, \quad T := \min\{k \in \mathbb{N}, k > S :\ X_k = 1\}\,,$$

con la convenzione $\min \emptyset := +\infty$. Poniamo quindi

$$U := T - S$$

e definiamo infine per $k \in \mathbb{N}$ gli eventi

$$A_k := \{X_k = 1\}\,.$$

(i) Fissiamo $n,m \in \mathbb{N}$ con $n > m$. Si esprima l'evento $\{S = m, T = n\}$ in funzione degli eventi $A_1, \ldots, A_n$ mediante opportune operazioni insiemistiche. Si deduca quindi la densità congiunta

$$\mathrm{p}_{S,T}(m,n) = \mathrm{P}(S = m, T = n) = (1-p)^{n-2} p^2\, \mathbb{1}_{\{1 \le m < n\}}\,.$$

(ii) Si determini la densità congiunta delle variabili aleatorie S,U. Si deduca che S e U sono indipendenti e hanno la stessa distribuzione marginale (quale?).

(iii) Si calcolino $\mathrm{E}(T)$ e $\mathrm{Var}(T)$.

Soluzione 7. (i) Si ha

$$\{S = m, T = n\} = \Big(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i^c\Big) \cap A_m \cap \Big(\bigcap_{i=m+1}^{n-1} A_i^c\Big) \cap A_n\,,$$

e dato che gli eventi $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti con la stessa probabilità p si deduce che per $m,n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ si ha

$$\mathrm{p}_{S,T}(m,n) = (1-p)^{m-1} p (1-p)^{n-m-1} 1 = (1-p)^{n-2} p^2\,.$$

(ii) Per ogni $m,\ell \in \mathbb{N}$ si ha

$$\{S = m, U = \ell\} = \{S = m, T = m + \ell\}\,,$$

da cui

$$\mathrm{p}_{S,U}(m,\ell)=\mathrm{p}_{S,T}(m,m+\ell)=p^2(1-p)^{m+\ell-2}=[p(1-p)^{m-1}][p(1-p)^{\ell-1}]\,.$$

Questo mostra che $S,U\sim\mathrm{Geo}(p)$ e che S e U sono indipendenti.

(iii) Si ha $T=S+U$ da cui, per linearità del valor medio e ricordando (**??**), si ottiene $\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}(S)+\mathrm{E}(U)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{2}{p}$. Dato che S e U sono indipendenti, ricordando (**??**) si ottiene $\mathrm{Var}(T)=\mathrm{Var}(S)+\mathrm{Var}(U)=2\frac{1-p}{p^2}$.

Esercizio 8. Il piatto di una roulette contiene i numeri da 0 a 36. Consideriamo due possibili puntate: A) quella sui numeri pari: si vince se esce un numero pari tra 2 e 36, e in questo caso si riceve il doppio del capitale puntato (quindi si resta in attivo di una quantità uguale al capitale puntato); B) quella sulla prima dozzina: si vince se esce un numero tra 1 e 12, e in questo caso si riceve il triplo del capitale puntato (quindi si resta in attivo del doppio del capitale puntato).

Supponiamo di puntare contemporaneamente due Euro sui numeri pari, e un Euro sulla prima dozzina. Sia X il bilancio della giocata (capitale finale - capitale iniziale).

a) Determinare la densità di X e $E(X)$.

b) Si considerino le seguenti variabili casuali:

$$Y=\begin{cases}1 \text{ se esce un numero pari}\\ 0 \text{ altrimenti}\end{cases}$$

$$Z=\begin{cases}1 \text{ se esce un numero della prima dozzina}\\ 0 \text{ altrimenti}\end{cases}$$

Calcolare $Cov(Y,Z)$.

c) Dopo aver espresso X come funzione di Y e Z, calcolare $E(X)$ e $Var(X)$ senza usare la densità calcolata in a).

Soluzione 8. a) Introduciamo gli eventi

$$A=\{\text{esce un numero pari (tra 2 e 36)}\}\,,\qquad B=\{\text{esce un numero tra 1 e 12}\}$$

È chiaro che l'esito degli eventi A e B determina X: più precisamente,

$$X=-3\cdot 1_{(A\cup B)^c}+1\cdot 1_{A\setminus B}+0\cdot 1_{B\setminus A}+4\cdot 1_{A\cap B}\,.$$

Notando che gli eventi $\{(A\cup B)^c,\ A\setminus B,\ B\setminus A,\ A\cap B\}$ sono a due a due disgiunti, si ha che $X(\Omega)=\{-3,\,0,\,1,\,4\}$ e

$$p_X(-3)=P((A\cup B)^c)=\frac{13}{37}\,,\qquad p_X(0)=p(B\setminus A)=\frac{6}{37}$$
$$p_X(1)=P(A\setminus B)=\frac{12}{37}\,,\qquad p_X(4)=P(A\cap B)=\frac{6}{37}\,,$$

da cui $E(X)=-3p_X(-3)+p_X(1)+4p_X(4)=-\frac{3}{37}$.

b) Dato che Y e Z sono variabili di Bernoulli, si ha che

$$\begin{aligned}Cov(Y,Z) &= E(YZ)-E(Y)E(Z) = P(Y=1,Z=1)-P(Y=1)P(Z=1)\\ &= \frac{6}{37}-\frac{18}{37}\frac{12}{37} = \frac{6}{1369}\,.\end{aligned}$$

c) Si ha che

$$X = (4Y-2)+(3Z-1) = 4Y+3Z-3\,.$$

Dato che $Y \sim Be(\frac{18}{37})$, $Z \sim Be(\frac{12}{37})$, si ha che

$$E(X) = 4E(Y)+3E(Z)-3 = 4\frac{18}{37}+3\frac{12}{37}-3 = -\frac{3}{37}\,.$$

Analogamente si ha che

$$\begin{aligned}Var(X) &= 16Var(Y)+9Var(Z)+2\cdot 12\cdot Cov(Y,Z)\\ &= 16\frac{18}{37}\frac{19}{37}+9\frac{12}{37}\frac{25}{37}+24\frac{6}{1369} = \frac{8316}{1369}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 9. In un'urna vi sono r palline rosse e v palline verdi. Estraggo in successione due palline, senza reintroduzione. Per $i = 1,2$, sia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-ma pallina è rossa}\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Calcolare il coefficente di correlazione tra X_1 e X_2.

Soluzione 9. Si noti che

$$p_{X_1,X_2}(1,1) = \frac{r}{r+v}\frac{r-1}{r+v-1},$$

da cui si ha

$$E(X_1X_2) = \sum_{x_1,x_2} x_1x_2 p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = p_{X_1,X_2}(1,1) = \frac{r}{r+v}\frac{r-1}{r+v-1}.$$

Inoltre $X_1, X_2 \sim Be(r/(r+v))$, da cui

$$Var(X_1) = Var(X_2) = \frac{rv}{(r+v)^2},\ E(X_1) = E(X_2) = \frac{r}{r+v}.$$

A questo punto è sufficiente usare la definizione di coefficiente di correlazione, per trovare

$$\rho_{X,Y} = -1/(r+v-1).$$

Esercizio 10. Stefano lancia ripetutamente un dado regolare a sei facce. Indichiamo con X_k il risultato dell'k-esimo lancio, per $k \in \mathbb{N}$. Matteo sta a guardare gli esiti dei lanci, aspettando il primo istante T in cui esce un numero in $\{1,2,3,4,5\}$. Quando ciò accade, si appunta su un foglio il numero uscito $Y := X_T$.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si esprima l'evento $\{T = n\}$ in termini delle variabili aleatorie $X_1, \dots, X_n$. Si deduca quindi la densità discreta di T e la si riconosca.

(ii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \{1,2,3,4,5\}$, si esprima l'evento $\{T = n, Y = a\}$ in termini delle variabili aleatorie $X_1, \dots, X_n$. Si deduca quindi la densità discreta congiunta delle variabili aleatorie T e Y.

(iii) Si determini la distribuzione di Y. Le variabili T e Y sono indipendenti?

Soluzione 10. (i) Si osservi che

$$\{T = n\} = \{X_1 = 6, \dots, X_{n-1} = 6, X_n \neq 6\},$$

da cui, usando l'indipendenza delle X_k, otteniamo

$$\mathrm{P}(T = n) = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1},$$

cioè $T \sim Ge(\frac{5}{6})$.

(ii) Per ogni $n \geq 1$ e $a \in \{1,2,3,4,5\}$ si ha

$$\{T = n, Y = a\} = \{X_1 = 6, \dots, X_{n-1} = 6, X_n = a\},$$

da cui segue che

$$\mathrm{p}_{T,Y}(n,a) = \frac{1}{6^n}.$$

(iii) Abbiamo

$$\mathrm{p}_Y(a) = \sum_{n \geq 1} \mathrm{p}_{T,Y}(n,a) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{5}, \qquad \forall a \in \{1,2,3,4,5\},$$

(ricordare la serie geometrica). Dunque, per ogni $n \geq 1$ e $a \in \{1,2,3,4,5\}$

$$\mathrm{p}_T(n)\,\mathrm{p}_Y(a) = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{5} = \frac{1}{6^n} = \mathrm{p}_{T,Y}(n,a),$$

da cui segue che T e Y sono indipendenti.

Esercizio 11. In un certo spazio campionario Ω si considerino due eventi A e B, e le variabili aleatorie

$$X = \mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 \text{ se si verifica } A \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$Y = \mathbf{1}_B = \begin{cases} 1 \text{ se si verifica } B \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare la covarianza $Cov(X,Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X,Y)$ in termini di $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

(b) Si determini la varianza $Var(X+Y)$ nei casi in cui $B = A$ e $B = A^c$.

Soluzione 11. Notare che $X \sim B(1,P(A))$, $Y \sim B(1,P(B))$ e $XY = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B} \sim B(1,P(A\cap B))$.

(a)

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = P(A\cap B) - P(A)P(B).$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{P(A\cap B) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)[1-P(A)]P(B)[1-P(B)]}}.$$

(b) Se $B = A$, si ha che $X = Y$, e dunque

$$Var(X+Y) = Var(2X) = 4Var(X) = 4P(A)[1-P(A)].$$

Se $B = A^c$, si ha $X+Y = 1$, e quindi

$$Var(X+Y) = 0.$$

Esercizio 12. Sia

$$f(x,y) = e^{-x-y}.$$

Si calcoli

$$\int\int_B f(x,y)dxdy$$

per le seguenti scelte di B:

(a) $B = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 3\}$.
(b) $B = \{(x,y) : 0 \le x \le y < +\infty\}$.
(c) $B = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\, -x \le y < +\infty\}$.

Soluzione 12. (a)

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[e^{-x}\int_0^3 e^{-y}dy\right]dx = \int_0^1 e^{-x}dx\left[1-e^{-3}\right] = (1-e^{-1})(1-e^{-3}).$$

(b)

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\left[e^{-x}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy\right]dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{2}.$$

(c)

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[e^{-x}\int_{-x}^{+\infty} e^{-y}dy\right]dx = 1.$$