

AVVISO Il ricevimento di domani mattina è cancellato.
Sarà recuperato nei giorni successivi per appuntamento

VALORE ATTESO CONDIZIONATO

Qualche tempo fa abbiamo affrontato il problema:
date due v.a. X e Y , trovare a e b tali da
minimizzare

$$E[(X - (aY + b))^2]$$

Quello che ora ci proponiamo è di trovare la funzione
 $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ tale da minimizzare

$$E[(X - \varphi(Y))^2]$$

Siano X e Y due v.a. discrete oppure congiuntamente continue. Denotiamo con $P_{X,Y}$ o $f_{X,Y}$ la loro densità congiunta.

Definizione Si dice densità condizionata di X dato Y la quantità, definita per ogni y per cui

$$P_Y(y) > 0 \quad (\text{o } f_Y(y) > 0)$$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Nel caso discreto

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = P(X=x | Y=y)$$

Osservazione. Fissiamo y t.c. $P_{Y|Y}(y) > 0$.

$$\sum_x P_{X|Y}(x|y) = \sum_x \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_{Y|Y}(y)} = \frac{P_{Y|Y}(y)}{P_{Y|Y}(y)} = 1$$

Analogamente, nel caso continuo,

$$\int f_{X|Y}(x|y) dx = 1$$

Definizione Siano X e Y due v.e. Si dice

valore atteso di X condizionato a $Y=y$ la quantità

$$E(X | Y=y) = \sum_x x P_{X|Y}(x|y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

Più in generale, se $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiamo

$$\begin{aligned} E[g(X,Y) | Y=y] &= \sum_x g(x,y) P_{X|Y}(x|y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X|Y}(x|y) dx \end{aligned}$$

Esempio $X \sim \text{Po}(\lambda)$, $Y \sim \text{Po}(\mu)$ indipendenti $Z = X + Y$

Calcolare $E(X | Z=z)$. Sappiamo che $Z \sim \text{Po}(\lambda + \mu)$

$$P_{X,Z}(x,z) = P(X=x, Z=z) = P(X=x, Y=z-x) \\ = P(X=x) P(Y=z-x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\mu} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}$$

$$x \quad 0 \leq x \leq z$$

$$P_{X|Z}(x|z) = \frac{P_{X,Z}(x,z)}{P_Z(z)} = \frac{e^{-\lambda} e^{-\mu} \lambda^x \mu^{z-x}}{x! (z-x)!} \frac{z!}{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^z} \\ = \binom{z}{x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{z-x}$$

Quindi $p_{X|Z}(x|z)$ è la densità di una $B(z, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$

$$E(X|Z=z) = \sum_x x p_{X|Z}(x|z) = \frac{\lambda z}{\lambda+\mu}$$

Proprietà del valore atteso condizionato

$$1) E[aX_1 + bX_2 | Y=y] = aE(X_1 | Y=y) + bE(X_2 | Y=y)$$

$$2) E(g(X)h(Y) | Y=y) = h(y)E(g(X) | Y=y)$$

In fatti:

$$\sum_x g(x)h(y)P_{X|Y}(x|y) = h(y) \sum_x g(x)P_{X|Y}(x|y)$$
$$= h(y) E[g(X) | Y=y]$$

3) Se X e Y sono indipendenti

$$E[h(X) | Y=y] = E[h(X)]$$

$$\text{Infatti} \quad \sum_x h(x) p_{X|Y}(x|y) = \sum_x h(x) \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$= \sum_x h(x) \frac{p_X(x) \cancel{p_Y(y)}}{\cancel{p_Y(y)}} = E[h(X)]$$

In generale $E[g(X,Y) | Y=y]$ è una funzione di y , che denotiamo con $\varphi(y)$

La v.a. $\varphi(Y)$ viene denotata con

$E[g(X,Y) | Y]$. Notare che

$$E[E(g(X,Y) | Y)] = E[\varphi(Y)] = \sum_y \varphi(y) P_Y(y)$$

$$= \sum_y \left(\sum_x g(x,y) P_{X|Y}(x|y) \right) P_Y(y) = \sum_{x,y} g(x,y) P_{X,Y}(x,y)$$

$$= E[g(X,Y)]$$

Teorema Siano X e Y due v.a., e denotiamo
con $\varphi(y) = E(X|Y=y)$. Tale funzione φ risolve
il problema enunciato all'inizio della lezione
cioè

$$E[(X - \varphi(y))^2] \leq E[(X - h(y))^2] \quad \forall h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$E[(X - h(Y))^2] = E[(X - \psi(Y) + \psi(Y) - h(Y))^2]$$

$$E[(X - \psi(Y))^2] + \underbrace{E[(\psi(Y) - h(Y))^2]}_{\geq 0}$$

$$+ 2 E[(X - \psi(Y))(\psi(Y) - h(Y))]$$

$$\Rightarrow E[(X - h(Y))^2] \geq E[(X - \psi(Y))^2] + \underbrace{2 E[(X - \psi(Y))(\psi(Y) - h(Y))]}_{= 0}$$

E' sufficiente dimostrare che

$$E[(X - \psi(Y))(\psi(Y) - h(Y))] =$$

$$= E\left\{E[(X - \psi(Y))(\psi(Y) - h(Y)) | Y]\right\}$$

$$= E\left\{(\psi(Y) - h(Y)) E[X - \psi(Y) | Y]\right\} = 0$$

in quanto $E[X - \psi(Y) | Y] = E(X | Y) - E[\psi(Y) | Y]$

$$= E(X | Y) - \psi(Y) = 0$$