

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

Def Sia X una v.a. La sua funz. gen. dei momenti (f.g.m.) è definita da:

$$m_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty] \quad m_X(t) = E[e^{tX}]$$

Se X è discreta: $\sum_x e^{tx} p_X(x)$

Se X è continuo: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$

Esempio 1. $X \sim Po(\lambda)$

$$m_X(t) = \sum_x e^{tx} p_X(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!}$$

$$\left(\text{ricordando: } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \right) \quad | \quad = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$2. X \sim Ge(p) \quad m_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{tn} p(1-p)^{n-1} = p e^t \sum_{n=1}^{+\infty} (e^t(1-p))^{n-1}$$

$$= p e^t \sum_{m=0}^{+\infty} (e^t(1-p))^m \quad \text{Ricordiamo: } \sum_{m=0}^{+\infty} q^m = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } 0 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \end{cases}$$

Dunque: $m_X(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } e^{t(1-p)} \geq 1 \Leftrightarrow t \geq -\ln(1-p) \\ \frac{pe^t}{1-e^{t(1-p)}} & \text{se } e^{t(1-p)} < 1 \Leftrightarrow t < -\ln(1-p) \end{cases}$

3) $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ $f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \parallel_{[0, +\infty)}$

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx$$

$$m_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^+ x^{\alpha-1} e^{-(1-t)x} dx$$

Poiché, per ogni $\mu > 0$, $\frac{\mu^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\mu x} \parallel_{[0, +\infty)}^{(1)}$

è una densità, si ha

$$\int_0^+ x^{\alpha-1} e^{-\mu x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\mu^\alpha} \quad \text{Ponendo } \mu = 1-t$$

$$m_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-t)^\alpha} \quad x \quad t < 1$$

$$+ \infty \quad x \quad t \geq 1$$

In conclusion $m_X(t) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^d & t < \lambda \\ +\infty & t \geq \lambda \end{cases}$

4) $Z \sim N(0,1)$ $m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} = \exp\left[-\frac{x^2}{2} + tx\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx)\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx + t^2 - t^2)\right] = \exp\left[-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right] = e^{\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}$$

$$\text{Quindi } m_x(t) = e^{t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx}_{\text{densità di una } N(t, 1)} = e^{t^2/2}$$

$$5) X \sim N(\mu, \sigma^2). \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} X &= \sigma Z + \mu. \quad m_X(t) = E[e^{tX}] = E[e^{t(\sigma Z + \mu)}] \\ &= E[e^{t\mu} e^{t\sigma Z}] = e^{t\mu} E[e^{t\sigma Z}] = e^{t\mu} m_Z(t\sigma) \\ &= e^{t\mu} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \end{aligned}$$

Teorema Siano X e Y due v.v. tali che

$m_X(t) = m_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Allora X e Y hanno
la stessa distribuzione (densità)

Proposizione Se X e Y sono due v.o. indipendenti, allora

$$m_{x+y}(+) = m_x(+) m_y(+)$$

$$\underline{\text{Dim}} \quad m_{x+y}(t) = E[e^{t(x+y)}] = E[e^{tx} e^{ty}] = E[e^{tx}] E[e^{ty}] \\ = m_x(t) m_y(t)$$

Esempio $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ indep.

$$m_X(t) = e^{t\mu_1} e^{\frac{t^2 \sigma_1^2}{2}} \quad m_Y(t) = \dots$$

$$m_{X+Y}(t) = m_X(t) m_Y(t) = e^{t\mu_1} e^{t\mu_2} e^{\frac{t^2 \sigma_1^2}{2}} e^{\frac{t^2 \sigma_2^2}{2}}$$

$$= \underbrace{e^{t(\mu_1 + \mu_2)} e^{\frac{t^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2}}}_{\text{f.g.m. di una } N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

$$\Rightarrow \text{dal Teorema: } X+Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Esempio $X \sim B(n, p)$. Possiamo scrivere

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ dove $X_i \sim Be(p)$ indipendenti

$$m_X(t) = m_{X_1}(t) m_{X_2}(t) \dots m_{X_n}(t) = (m_{X_1}(t))^n$$

$$m_{X_1}(t) = E[e^{tX_1}] = e^{t \cdot 0} (1-p) + e^{t \cdot 1} p = 1-p + pe^t$$

$$\Rightarrow m_X(t) = (1-p + pe^t)^n$$

Se X è una v.a., il valore atteso

$E[X^n]$ si dice momento di ordine n di X

$$m_X(t) = E[e^{tX}] \Rightarrow \frac{d}{dt} m_X(t) = E\left[\frac{d}{dt} e^{tX}\right] \\ = E[X e^{tX}]. \text{ Iterando: } m_X^{(n)}(t) = E[X^n e^{tX}]$$

Proposizione $E[X^n] = m_X^{(n)}(0)$