ESERCIZI - FASCICOLO 11

Esercizio 1. Un lanciatore di giavellotto esegue $n \in \mathbb{N}$ lanci. Detta X_i la distanza ottenuta nell' i -esimo lancio, supponiamo che $X_1, \dots, X_n$ siano variabili aleatorie indipendenti con $X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, dove $\lambda \in (0, \infty)$. Indichiamo con M_n la massima distanza a cui è stato lanciato il giavellotto. Si determini la densità di M_n .

Esercizio 2. Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $U(0, 1)$, e definiamo

$$L_n := \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \quad Z_n := nL_n.$$

Si mostri che la funzione di ripartizione $F_{Z_n}(t)$ converge per $n \rightarrow \infty$ verso un limite $F(t)$, che è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria $\text{Exp}(1)$.

Esercizio 3. Siano $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variabili aleatorie indipendenti. $U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- (i) Si mostri che le variabili aleatorie $(Y_n := X_n + \frac{1}{2})_{n \in \mathbb{N}}$ sono $U(0, 1)$.
- (ii) Si mostri che per ogni $r > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\min\{X_1, \dots, X_n\} < -\frac{1}{2} + \frac{r}{n}\right) = 1 - e^{-r}.$$

Esercizio 4. Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorie Geometriche indipendenti di parametro p . Determinare la densità discreta di $Y := \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e di $Z := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Esercizio 5. Siano X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ , e Y una variabile aleatoria di Poisson di parametro μ , tra loro indipendenti. Si ponga $Z = X - Y$.

- (a) Calcolare la funzione generatrice dei momenti di Z .
- (b) Calcolare $E(Z^3)$.

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatorie continua, con densità

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Calcolare la funzione generatrice dei momenti, la media e la varianza di X .

Esercizio 7. Siano X e Y variabili aleatorie congiuntamente continue, con densità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{5} + cy & \text{se } 0 < x < 1, 1 < y < 5 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Si determini il valore di c .
- (b) Si calcoli $E(X|Y)$ e $E(X^2|Y)$.

Esercizio 8. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, tali che, per $k = 1, 2, \dots, n$, $P(X = k) = P(Y = k) = \frac{1}{n}$. Posto $Z = \frac{X+Y}{2}$, calcolare $E(Z|X)$ e $E(X|Z)$.

Esercizio 9. Siano X e Y variabili aleatorie congiuntamente continue, con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4} e^{-|x-y|} e^{-|y|}.$$

- Calcolare la densità condizionata $f_{X|Y}$ e il valor medio condizionato $E(X|Y)$.
- Calcolare $E(X)$ senza calcolare la densità f_X .

Esercizio 10. Siano X e Y due variabili continue la cui densità congiunta è

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{(1+x)^3} & \text{se } 0 < y < x \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Determinare la densità marginale f_X della variabile aleatoria X .
- Calcolare $E\left(\frac{1}{X}\right)$.
- Calcolare il valor medio condizionato $E(Y|X)$.
- Posto $Z = \sqrt{X}$, si determini la densità della variabile aleatoria Z .

Esercizio 11. (a) Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare il valor medio e la varianza di X .

- Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con la stessa distribuzione della X al punto (a). Si ponga

$$Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Si determini la funzione di ripartizione (anche detta funzione di distribuzione) di Y_n .

- Posto $W_n = \sqrt{n}Y_n$, mostrare che, per $n \rightarrow +\infty$, W_n converge in distribuzione ad una variabile aleatoria W , di cui va determinata la densità.

Esercizio 12. Da un'urna che contiene N palline numerate da 1 a N si eseguono due estrazioni *con reimmissione*.

- Qual è la probabilità che si estragga entrambe le volte la pallina con il numero 1?
- Qual è la probabilità che nelle due estrazioni si estragga la stessa pallina?
- Sia X il più piccolo dei due numeri estratti, e Y il più grande. Si determini la densità congiunta di X e Y .
- Si determini la densità condizionata $p_{X|Y}$.

Esercizio 13. Siano X e Y due variabili aleatorie congiuntamente continue, la cui densità congiunta è data dalla formula

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Calcolare le densità marginali di X e Y .
- (b) Calcolare i valori attesi condizionati $E(Y|X)$ e $E(e^{-Y}|X)$.
- (c) Calcolare il valore atteso condizionato $E(X|Y)$.

Esercizio 14. Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti, continue con densità

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Calcolare la funzione di ripartizione F_{X_n} .
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione F_{Y_n} di

$$Y_n := \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

- (c) Si ponga $Z_n := \sqrt{n}Y_n$. Si mostri che per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione di ripartizione $F_{Z_n}(x)$ converge ad un limite $F(x)$. (*Sugg.*: si ricordi il limite fondamentale $\lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, per $a \in \mathbb{R}$)
- (d) Mostrare che $F(x)$ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua, e se ne calcoli la densità.

Esercizio 15. Un concorso ha lo scopo di assegnare l'idoneità ad una data mansione. Prima del concorso è possibile, ma non obbligatorio, frequentare un corso di preparazione. Assumiamo che ogni candidato, indipendentemente dagli altri, abbia probabilità 0.25 di risultare idoneo se ha frequentato il corso di preparazione, e 0.15 se non l'ha frequentato. Al concorso si presentano 10 candidati, di cui 5 hanno frequentato il corso di preparazione. Sia X il numero di idonei fra coloro che hanno frequentato il corso di preparazione, e Y il numero di idonei fra gli altri. Sia infine Z il numero totale di idonei.

- (a) Determinare le densità discrete di X e Y .
- (b) Calcolare $Var(Z)$.
- (c) Calcolare la probabilità $P(Z = 3)$.
- (d) Calcolare $E(X|Z = 3)$.