

Prossime lezioni: domani (es.), Lu 30 (es.)
Lu 6, Me 7

I TEOREMI LIMITE

Siano $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ v.a. indipendenti
e con la stessa distribuzione (i.i.d.)

Definiamo $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ media campionaria

Legge dei grandi numeri Siano $X_1, X_2, \dots$ v.e. i.i.d.

Con media $\mu = E(X_i)$. Allora $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

Conseguenze Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi indipendenti
e con la stessa prob. $p = P(A_i)$

Definiamo $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se si verifica } A_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$X_i \sim \text{Be}(p)$ i.i.d. Per la legge dei grandi numeri

e n è grande $\bar{X}_n \simeq E(X_i) = p$

$$\text{Ma } \bar{X}_n = \frac{|\{i : A_i \text{ si verifica}\}|}{n}$$

Con ciò si recupera l'interpretazione frequentista
all'interno della Teoria della Probabilità.

La dim. della Legge dei grandi numeri richiede:

Disuguaglianza di Chebyshev

Sia X una v.a. $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$. $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Dim Sia $Y = \begin{cases} 1 & \text{se } |X - \mu| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$Y \sim Be(P(|X - \mu| \geq \varepsilon)) \quad \text{e} \quad \varepsilon^2 Y \leq (X - \mu)^2$$

$$\Rightarrow E(\varepsilon^2 Y) \leq E(|X - \mu|^2)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \text{"} & & \text{"} \\ \varepsilon^2 P(|X - \mu| \geq \varepsilon) & & \sigma^2 \end{array}$$

Dim della Legge dei Grandi Numeri.

$$\text{Da dim: } P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Applichiamo a $\bar{X}_n$ la dis. di Chebichev

$$E(\bar{X}_n) = E\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n} = \frac{\mu + \dots + \mu}{n} \\ = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \text{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) \\ = \frac{\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{Per la dis. di Chebichev:}$$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ricordiamo il Teorema di De-Moivre - Laplace :

$$S_n \sim B(n, p) \quad P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) \simeq \Phi(x)$$

x n è grande

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad X_i \sim \text{Be}(p) \text{ indep}$$

Definizione Sia $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ una successione di v.e., e Z un'altra v.e. Diciamo che le Z_n convergono a Z in distribuzione se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = F_Z(x)$$

Teorema limite centrale

Siano $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ v.a. i.i.d. con media μ
e varianza σ^2 . Poniamo $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$

Allora Z_n converge in distribuzione

$$Z \sim N(0, 1)$$

Proposizione Z_n converge a Z in distribuzione

$$\mu \text{ e } \sigma > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} m_{Z_n}(t) = m_Z(t)$$

Dimostrazione del Teorema limite Centrale

$$Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \quad Z \sim N(0,1) \Rightarrow m_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\text{Sia } Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad Z_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}} \quad Y_i \text{ i.i.d.}$$

Dimostriamo con $m = m_{Y_i}$. Notare che $E(Y_i) = 0$ $\text{Var}(Y_i) = 1$

$$m_{Z_n}(t) = E\left[e^{t \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}}\right] = m_{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(m\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$$m'(0) = E(Y_i) = 0 \quad m''(0) = E(Y_i^2) = 1 \quad m(0) = 1.$$

Per le Formule di Taylor: $m(x) = m(0) + m'(0)x$

$$+ \frac{1}{2}m''(0)x^2 + o(x^2)$$

$$\Rightarrow m\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + \text{"termini trascurabili"}$$

Pertanto: $m_{Z_n}(t) = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + \text{term. trascur.}\right)^n$

Ricordiamo che $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} m_{Z_n}(t) = e^{t^2/2} = m_Z(t)$$