

Teorema limite centrale Se $X_1, \dots, X_n, \dots$ sono

indipendenti e con la stessa distribuzione (i.i.d.)
allora $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = \Phi(x)$$

dove $\mu = E(X_i)$ $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$

NOTA Se le $X_i \sim \text{Be}(p)$ allora il teorema coincide
con il Teorema di De Moivre - Laplace sull'approssimazione normale
di una binomiale

Quindi il metodo dell'approx normale che consiste

nell'approssimare $\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ con $Z \sim N(0,1)$

si può usare con qualsiasi sequenza di v.a. $X_1, \dots, X_n$ che siano i.i.d.

La correzione di continuità è opportuno usarla ogniqualvolta le X_i sono v.a. che assumono solo valori interi (Binomiali, Geometriche, Poisson, ...)

Esercizio Il numero di auto vendute in una settimana da un concessionario è una v.a. di media 16 e deviazione standard 3. Supponendo che le vendite in settimane distinte siano indipendenti e che si possa utilizzare l'approssimazione normale, si calcoli approssimativamente la prob. che in 25 settimane il numero di auto vendute sia maggiore di 450.

X_i = numero di auto vendute l' i -ma settimana

$$X = X_1 + \dots + X_{25} \quad X_i \text{ i.i.d.}$$

$$P(X > 450) = P(X \geq 450.5) =$$

$$P(X_1 + \dots + X_{25} \geq 450.5) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{25} - 25 \cdot 16}{3 \cdot 5} \geq \frac{450.5 - 25 \cdot 16}{3 \cdot 5}\right)$$

$$\approx P\left(Z \geq \frac{450.5 - 25 \cdot 16}{3 \cdot 5}\right) = P(Z \geq 3.36) = 1 - \Phi(3.36) \\ = 0.00039$$

Esercizio Il numero di studenti che si iscrivono ad un dato corso ha distribuzione di Poisson di media 100. Qual è la probabilità che il numero di iscrizioni sia ≥ 120 ?

$$X \sim \text{Po}(100) \quad P(X \geq 120) = 1 - P(X \leq 119)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{119} e^{-100} \frac{(100)^i}{i!}$$

$$P(X \geq 120) = P(X_1 + \dots + X_{100} \geq 120) \quad \text{dove}$$

$$X_i \sim \text{Po}(1) \quad \text{indipendenti}$$

$$P(X_1 + \dots + X_{100} \geq 120) = P(X_1 + \dots + X_{100} \geq 119.5) =$$

$$= P\left(\frac{X - 100}{10} \geq \frac{119.5 - 100}{10}\right) \approx P(Z \geq 1.95)$$

$$= 1 - \Phi(1.95) \approx 0.0256$$

Esercizio Un ingegnere deve correre 50 esami. I tempi necessari a correre i vari esami sono indipendenti, hanno media 10 min e dev. standard 4 min. Calcolare approssimativamente la probab. che il tempo totale necessario a correre gli esami sia ≤ 450 minuti.

X_i = tempo per correre l' i -mo esame

$$X = X_1 + \dots + X_{50} \quad P(X \leq 450) = P\left(\frac{X - 50 \cdot 10}{4\sqrt{50}} \leq \frac{450 - 50 \cdot 10}{4 \cdot \sqrt{50}}\right)$$

$$\approx P\left(Z \leq \frac{450 - 500}{\sqrt{800}}\right) = \Phi\left(-\frac{50}{\sqrt{800}}\right) = \dots$$

Esempio Il peso (in tonnellate) dei veicoli circolanti ha media 3 e deviazione standard 0.3. Un ponte ha una portata di 400 tonnellate. Qual'è il numero minimo di veicoli che possono transitare contemporaneamente affinché la probab. di superare la portata sia ≤ 0.1 ?

X_i peso dell' i -mo veicolo

$X = X_1 + \dots + X_n$ Vogliamo che $P(X > 400) \leq 0.1$

$$0.1 \geq P(X > 400) = P\left(\frac{X - 3n}{0.3\sqrt{n}} > \frac{400 - 3n}{0.3\sqrt{n}}\right)$$

$$\simeq P\left(Z > \frac{400 - 3n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{400 - 3n}{0.3\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{400-3n}{0.3\sqrt{n}}\right) \geq 0.9 \quad \frac{400-3n}{0.3\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}(0.9) = 1.28$$

(Deriviamo $400-3n > 0$ e)

$$400 - 3n \geq 1.28 \cdot 0.3\sqrt{n}$$

$$3\sqrt{n}^2 + 1.28 \cdot 0.3\sqrt{n} - 400 \leq 0$$

L'equazione associata ha una radice negativa e una positiva, ≈ 11.48

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{n} \leq 11.48 \Rightarrow n \leq 131$$

Esercizio Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. indipendenti,

continue, con densità

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare approx. $P(X_1 + X_2 + \dots + X_{625} \leq 150)$

Bisogna calcolare μ e σ^2

$$\mu = \int_0^1 x \cdot 3(1-x)^2 dx = \frac{1}{4}$$

$$E(X_i^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 3(1-x)^2 dx = \frac{1}{10}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$$

$$P(X_1 + \dots + X_{625} \leq 158) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{625} - 625 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{80}} \sqrt{625}} \leq \frac{158 - 625 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{80}} \sqrt{625}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{158 - \frac{625}{4}}{\sqrt{\frac{3}{80}} \sqrt{625}}\right) = \dots$$

Osservazione Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono i.i.d.

e sono Normali, allora

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

esattamente, senza alcuna approssimazione.