ESERCIZI - FASCICOLO 8

Esercizio 1. Siano $X \sim U(0,1)$ e $Y \sim U(0,1)$ variabili aleatorie indipendenti. Determinare la densità congiunta e le densità marginali delle variabili aleatorie $Z = X+2Y$ e $W = X-Y$.

Soluzione 1. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
per cui
$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$
Quindi
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z-W}{3} \\ \frac{Z+2W}{3} \end{pmatrix}$$
Si ha quindi, osservando che $\det(A) = -3$,
$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{3}\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\frac{z-w}{3}\right)\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\frac{z+2w}{3}\right).$$
Notando che necessariamente $Z \in [0,3]$ e $W \in [-1,1]$, per $z \in [0,3]$
$$f_Z(z) = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,1]}\left(\frac{z-w}{3}\right)\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\frac{z+2w}{3}\right) dw.$$
Ad esempio facendo qualche disegno si vede che
$$\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\frac{z-w}{3}\right)\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\frac{z+2w}{3}\right) = \begin{cases} \mathbf{1}_{[-z/2,z]}(w) & \text{se } z \in [0,1] \\ \mathbf{1}_{[-z/2,(3-z)/2]}(w) & \text{se } z \in [1,2] \\ \mathbf{1}_{[z-3,(3-z)/2]}(w) & \text{se } z \in [2,3] \end{cases}$$
Ne segue che
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} & \text{se } z \in [0,1] \\ \frac{1}{2} & \text{se } z \in [1,2] \\ \frac{3-z}{2} & \text{se } z \in [2,3] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
In modo simile, per $w \in [-1,1]$,
$$\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\frac{z-w}{3}\right)\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\frac{z+2w}{3}\right) = \begin{cases} \mathbf{1}_{[w,3-2w]}(z) & \text{se } w \in [0,1] \\ \mathbf{1}_{[-2w,3+w]}(z) & \text{se } w \in [-1,0] \end{cases}$$
per cui
$$f_W(w) = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,1]}\left(\frac{z-w}{3}\right)\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\frac{z+2w}{3}\right) dz = \begin{cases} 1-w & \text{se } w \in [0,1] \\ 1+w & \text{se } w \in [-1,0] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 2. Siano $X \sim Exp(\lambda)$ e $Y \sim Exp(\mu)$ variabili aleatorie indipendenti. Determinare le densità delle variabili aleatorie $Z = X + Y$ e $W = X - Y$.

Soluzione 2. Si procede come nell'esercizio precedente, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notare che $\det(A) = -2$ e

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z+W}{2} \\ \frac{Z-W}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{2}\lambda\mu e^{-\lambda\frac{z+w}{2}} e^{-\mu\frac{z-w}{2}} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(z+w)\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(z-w).$$

Si osservi che $Z \geq 0$, mentre $W \in \mathbb{R}$. Quindi, per $z \geq 0$,

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}\lambda\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\frac{z+w}{2}} e^{-\mu\frac{z-w}{2}} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(z+w)\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(z-w)dw.$$

Notando che $z+w \geq 0$ e $z-w \geq 0$ se e solo se $-z \leq w \leq z$, si ha

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}\lambda\mu \int_{-z}^{z} e^{-\lambda\frac{z+w}{2}} e^{-\mu\frac{z-w}{2}} dw = \frac{1}{2}\lambda\mu e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}z} \int_{-z}^{z} e^{\frac{\mu-\lambda}{2}w} dw.$$

Poiché

$$\int_{-z}^{z} e^{\frac{\mu-\lambda}{2}w} dw = \begin{cases} \frac{e^{\frac{\mu-\lambda}{2}z} - e^{-\frac{\mu-\lambda}{2}z}}{\mu-\lambda} & \text{se } \lambda \neq \mu \\ 2z & \text{se } \lambda = \mu \end{cases}$$

abbiamo: per $\lambda \neq \mu$

$$f_Z(z) = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z})\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(z),$$

mentre per $\lambda = \mu$

$$f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(z).$$

Analogamente, per $w \in \mathbb{R}$,

$$f_W(w) = \frac{1}{2}\lambda\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\frac{z+w}{2}} e^{-\mu\frac{z-w}{2}} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(z+w)\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(z-w)dz.$$

Notando che $z+w \geq 0$ e $z-w \geq 0$ se e solo se $z \geq |w|$, abbiamo

$$f_W(w) = \frac{1}{2}\lambda\mu e^{-\frac{\lambda-\mu}{2}w} \int_{|w|}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}z} dz = \frac{\lambda\mu}{2(\lambda+\mu)} e^{-\frac{\lambda-\mu}{2}w} e^{-\frac{\lambda+\mu}{2}|w|}$$

Esercizio 3. Siano (X,Y) congiuntamente continue con densità:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(e^x + e^{x+y}) \text{ se } -1 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[e^{-X}]$.
(d) X e Y sono indipendenti?

Soluzione 3. (a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} \alpha(e^x + e^{x+y})\ dydx =$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} e^x(1+e^y)\ dydx = \alpha \int_{-1}^{1} |e^x(y+e^y)\ |_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1} 2e^x + e^x e^2 - e^x e^0 dx = \alpha \int_{-1}^{1} e^x(e^2+1)dx =$$

$$= \alpha \left|e^x(e^2+1)\right|_{x=-1}^{x=1} = \alpha(e-e^{-1})(e^2+1)$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{(e-e^{-1})(e^2+1)}$.
(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy$$

Per $x \notin (-1,1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dy = 0$
Per $x \in (-1,1)$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{0}^{2} \alpha \cdot e^x(1+e^y)\ dy =$$

$$= \alpha\, |e^x(y+e^y)\ |_{y=0}^{y=2} = \alpha \cdot e^x\left(2+e^2-1\right) = \frac{e^x\left(e^2+1\right)}{(e-e^1)(e^2+1)} = \frac{e^x}{e-e^{-1}}$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (-1,1) \\ \frac{e^x}{e-e^{-1}} & x \in (-1,1) \end{cases}$$

si procede in maniera analoga per f_Y,
Per $y \notin (0,2)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dx = 0$
Per $y \in (0,2)$ invece

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx = \int_{-1}^{1} \alpha \cdot e^x(1+e^y)\, dx =$$

$$= \alpha\, |e^x(1+e^y)\,|_{x=-1}^{x=1} = \alpha \cdot \left(e^1 - e^{-1}\right)(1+e^y) = \frac{(1+e^y)\left(e-e^{-1}\right)}{(e-e^1)(e^2+1)} = \frac{1+e^y}{e^2+1}$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,2) \\ \frac{1+e^y}{e^2+1} & y \in (0,2) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds$$

Per $x \leq -1$ si ha $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X)}(s)\, ds = \int_{-\infty}^{x} 0\, ds = 0$
Per $x \geq 1$ si ha $F_X(x) = P(X \leq x) = 1$
Per $-1 < x < 1$ invece

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds = \int_{-1}^{x} \frac{e^s}{e-e^{-1}}\, ds = \frac{e^x - e^{-1}}{e-e^{-1}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{e^x-e^{-1}}{e-e^{-1}} & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analoga per F_Y ottenendo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{y+e^y-1}{1+e^2} & 0 < y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$

(c)

$$\mathbb{E}[e^{-X}] = \int e^{-x} f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} e^{-x} \frac{e^x}{e-e^{-1}}\, dx = \frac{2}{e-e^{-1}}$$

(d) X e Y sono indipendenti, basta verificare che $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ per ogni x e y.

Esercizio 4. Siano (X,Y) congiuntamente continue con densità:

$$f_{(X,Y)}(x,y) \begin{cases} \alpha(e^x + e^{-y}) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < 1,\ -1 < y < 0\ \}$
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{P}(X+Y<0)$.

(d) Calcolare $\mathbb{E}[e^Y]$.

Soluzione 4. (a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\; dxdy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\; dydx = \iint_D \alpha(e^x + e^{-y})dydx = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^0 e^x + e^{-y}\; dydx =$$

$$= \alpha \cdot \int_0^1 \left[ye^x - e^{-y}\right]_{y=-1}^{y=0}\; dx = \alpha \cdot \int_0^1 -e^0 + e^x + e^1\; dx =$$

$$= \alpha \cdot [x(e-1)+e^x]_0^1 = \alpha(e-1+e-e^0) = 2\cdot \alpha(e-1)$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{2(e-1)}$.
(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\; dy$$

Per $x \notin (0,1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\; dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\; dy = 0$
Per $x \in (0,1)$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\; dy = \int_{-1}^{0} \alpha(e^x + e^- y)\; dy =$$

$$= \alpha \left| ye^x - e^- y \right|_{y=-1}^{y=0} = \alpha\left(-e^0 + e^x + e\right)$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ \alpha\,(e^x + e - 1) & x \in (0,1) \end{cases}$$

Si procede in maniera analoga per f_Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\; dx$$

Per $y \notin (-1,0)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\; dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\; dx = 0$
Per $y \in (-1,0)$ invece

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\; dx = \int_{0}^{1} \alpha(e^x + e^{-y})\; dx =$$

$$= \alpha \left| e^x + xe^{-y} \right|_{x=0}^{x=1} = \alpha\left(-e^0 + e^{-y} + e\right)$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (-1,0) \\ \alpha\,(e^{-y} + e - 1) & y \in (-1,0) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds$$

Per $x \leq 0$ si ha $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X)}(s)\ ds = \int_{-\infty}^{x} 0\ ds = 0$
Per $x \geq 1$ si ha $F_X(x) = P(X \leq x) = 1$
Per $0 < x < 1$ invece

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds = \int_{0}^{x} \alpha\,(e^s + e - 1)\ ds =$$

$$= \alpha\,|e^s + s(e-1)\,|_{s=0}^{s=+x} = \alpha\,(x(e-1) + e^x - 1)$$

Dunque

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \alpha\,(x(e-1) + e^x - 1) & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per F_Y ottenendo:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \alpha\,(y(e-1) - e^{-y} + 2e - 1) & -1 < y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$$

(c) Denotiamo con C l'insieme dei punti (x,y) di D tali che $x+y<0$. Allora si ha:

$$P(X+Y<0) = \iint_C f_{(X,Y)}(x,y)\ dydx$$

Al variare di x tra 0 e 1 la disuguaglianza $x+y<0$ ci dà $y<-x$. Dunque

$$P(X+Y<0) = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^{-x} e^x + e^{-y}\ dydx =$$

$$= \alpha \cdot \int_0^1 \left[ye^x - e^{-y}\right]_{y=-1}^{y=-x}\ dx = \alpha \cdot \int_0^1 -xe^x - e^x + e^x + e^1\ dx =$$

$$= \alpha \cdot [-xe^x + e^x + xe]_0^1 = \alpha(-e + e + e - e^0) = \alpha(e-1) = \frac{1}{2}$$

(d) Si può calcolare $\mathbb{E}[e^Y]$ risolvendo:

$$\mathbb{E}[e^Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} e^y \cdot f_{(X,Y)}(x,y)\ dydx$$

oppure poiché e^Y dipende solo da Y risolvendo

$$\mathbb{E}[e^Y] = \int_{\mathbb{R}} e^y \cdot f_Y(y)\ dy$$

Illustriamo la risoluzione del primo integrale (il più difficile).

$$\mathbb{E}[e^Y] = \iint_D e^y \cdot \alpha(e^x + e^{-y})\, dydx = \alpha \cdot \int_0^1 \int_{-1}^0 e^{x+y} + 1\, dydx =$$

$$= \alpha \cdot \int_0^1 \left[e^{x+y} + y\right]_{y=-1}^{y=0}\, dx = \alpha \cdot \int_0^1 e^x - e^{x-1} + 1\, dx =$$

$$= \alpha \cdot \left[e^x - e^{x-1} + x\right]_0^1 = \alpha(e - e^0 + 1 - e^0 + e^{-1}) = \frac{e + e^{-1} - 1}{2(e-1)}$$

Esercizio 5. Siano (X,Y) congiuntamente continue con densità $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3}) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 1\}$.
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare le funzioni di ripartizione e le densità delle variabili marginali X e Y.
(c) X e Y sono indipendenti?
(d) Calcolare $P(X < 1)$ e $P(X < 1|Y < 2)$.

Soluzione 5. (a) Per calcolare α bisogna imporre $f_{(X,Y)} \geq 0$ e $\iint f_{(X,Y)} dxdy = 1$.
Per $(x,y) \in D$ si ha: $sen(x) > 0$, $cos(x) > 0$, $Y^2 > 0$ e $Y^3 > 0$ dunque per soddisfare la prima condizione sarà sufficiente imporre $\alpha \geq 0$. Calcoliamo ora l'integrale $\iint f_{(X,Y)} dxdy$.

$$\iint f_{(X,Y)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{+\infty} \alpha \left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3}\right) dydx =$$

$$= \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{sen(x)}{(-1)y} + \frac{2cos(x)}{(-2)y^2}\right]_{y=1}^{y=+\infty} dx = \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen(x) + cos(x))\, dx =$$

$$= \alpha\left[-cos(x) + sen(x)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \alpha(-cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos(0) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0) =$$

$$= \alpha(-0 + 1 + 1 - 0) = 2\alpha$$

Dunque

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

(b) $f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x,y)dy$
Se $x \notin (0, \frac{\pi}{2})$ allora $f_X(x) = \int 0 dy = 0$
Consideriamo il caso $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora:

$$f_X(x) = \int f_{(X,Y)} dy = \int_1^{+\infty} \alpha \left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3}\right) dy =$$

$$= \alpha \left[\frac{sen(x)}{(-1)y} + \frac{2cos(x)}{(-2)y^2} \right]_{y=1}^{y=+\infty} = \alpha \left(sen(x) + cos(x) \right) =$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(sen(x) + cos(x)) & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \notin (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x,y)dx$
Se $y \leq 1$ allora $f_Y(y) = \int 0dx = 0$
Consideriamo il caso $y > 1$ allora:

$$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3} \right) dx =$$

$$= \alpha \left[\frac{-cos(x)}{y^2} + \frac{2sen(x)}{y^3} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \alpha \left(\frac{-cos(\frac{\pi}{2})}{y^2} + \frac{2sen(\frac{\pi}{2})}{y^3} - \frac{-cos(0)}{y^2} - \frac{2sen(0)}{y^3} \right) =$$

$$= \alpha \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) =$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \alpha \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} \right) & y > 1 \end{cases}$$

$F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx$
Se $a \leq 0$ allora $F_X(a) = \int_{-\infty}^a 0dx = 0$
Se $a \geq \frac{\pi}{2}$ allora $F_X(a) = P(X \leq a) = 1$.
Consideriamo il caso $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx = \int_0^a \alpha(sen(x) + cos(x))dx =$$

$$= \alpha[-cos(x) + sen(x)]_0^a dx = \alpha(-cos(a) + sen(a) + cos(0) - sen(0)) =$$
$$= \alpha(1 - cos(a) + sen(a))$$

Dunque

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ \alpha(1 - cos(a) + sen(a)) & a \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & a \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$F_Y(b) = P(Y \leq b) = \int_{-\infty}^a f_Y(y)dy$
Se $b \leq 1$ allora $F_Y(b) = \int_{-\infty}^b 0dy = 0$
Consideriamo il caso $b > 1$ allora:

$$F_Y(b) = \int_{-\infty}^{b} f_Y(y)dy = \int_{1}^{b} \alpha\left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3}\right)dy = \alpha\left[\frac{1}{-y} + \frac{2}{(-2)y^2}\right]_1^b dy =$$

$$\alpha\left(\frac{1}{-b} + \frac{2}{(-2)b^2} - \frac{1}{-1} - \frac{2}{(-2)1^2}\right) = \alpha\left(2 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}\right) =$$

Dunque

$$F_Y(b) = \begin{cases} 0 & b \leq 1 \\ \alpha\left(2 - \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}\right) & b > 1 \end{cases}$$

(c) Le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti perché la funzione $f_X \cdot f_Y$ è diversa da $f_{(X,Y)}$.
(d) Prima di tutto $sen(1)$ e $cos(1)$ devono essere calcolati in radianti quindi:

$$sen(1) = 0.841 \qquad cos(1) = 0.54$$

Poiché la v.a. X è assolutamente continua si ha:

$$P(X < 1) = P(X \leq 1) = F_X(1) = \alpha(1 - cos(1) + sen(1)) \simeq 0.65$$

$$P(X < 1|Y < 2) = \frac{P(X < 1, Y < 2)}{P(Y < 2)}$$

$$P(Y < 2) = P(Y \leq 2) = F_Y(2) = \alpha\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$P(X < 1, Y < 2) = \int_0^1 \int_1^2 \alpha\left(\frac{sen(x)}{y^2} + \frac{2cos(x)}{y^3}\right)dydx =$$

$$= \int_0^1 \alpha\left[\frac{sen(x)}{-y} + \frac{2cos(x)}{(-2)y^2}\right]_{y=1}^{y=2} dx =$$

$$= \int_0^1 \alpha\left(\frac{sen(x)}{-2} + \frac{2cos(x)}{(-2)2^2} - \frac{sen(x)}{-1} - \frac{2cos(x)}{(-2)1^2}\right)dx =$$

$$= \alpha\int_0^1 \left(\frac{1}{2}sen(x) + \frac{3}{4}cos(x)\right)dx = \alpha\left[-\frac{1}{2}cos(x) + \frac{3}{4}sen(x)\right]_0^1 =$$

$$= \alpha\left(-\frac{1}{2}cos(1) + \frac{3}{4}sen(1) + \frac{1}{2}cos(0) - \frac{3}{4}sen(0)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(2 - 2 \cdot cos(1) + 3 \cdot sen(1)\right) \simeq 0.43$$

$$P(X < 1|Y < 2) = \frac{0.43}{0.625} = 0.688$$

Esercizio 6. Siano (X, Y) congiuntamente continue, con densità

$$f_{X,Y}(x,y) \,=\, \frac{\alpha(\alpha+1)}{(1+x+y)^{2+\alpha}}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\,,$$

dove $\alpha \in (0,\infty)$ è una costante fissata.

(i) Senza fare conti, si spieghi perché le componenti X e Y hanno la stessa densità.

(ii) Si mostri che la funzione di ripartizione di X (e di Y) è data da

$$F_X(t) \,=\, \left(1 - \frac{1}{(1+t)^{\alpha}}\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\,.$$

Soluzione 6. (i) La funzione $f_{X,Y}(x,y)$ è simmetrica in x,y, quindi le densità marginali di X e Y, ottenute integrando la funzione $f_{X,Y}$ rispetto a ciascuna variabile, coincidono. Si ha inoltre

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \alpha\left[\frac{-1}{(1+x+y)^{1+\alpha}}\right]_{y=0}^{y=\infty}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = \frac{\alpha}{(1+x)^{1+\alpha}}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,.$$

(ii) Con una semplice integrazione, a partire dalla densità $f_X(x)$ già ricavata, si ottiene la formula per $F_X(x)$.