ESERCIZI - FASCICOLO 10

Esercizio 1. Il numero di accessi al giorno alla pagina web della Scuola di Scienze MM.FF.NN. ha distribuzione di Poisson, il numero medio di accessi al giorno è 74 e i numeri di accessi in giorni distinti sono indipendenti. Qualè la probabilità che il numero di accessi in un anno (= 365 giorni) superi 27200?

Soluzione 1. Sia X_i il numero di accessi nel giorno i. $X_i \sim Po(74)$. Usiamo l'approssimazione normale. Dato che i numeri sono molto elevati, la correzione di continuità non è rilevante.

$$P(X_1 + \cdots X_{365} > 27200) = P\left(\frac{\overline{X} - 74}{\sqrt{74}/\sqrt{365}} > \frac{\frac{27200}{365} - 74}{\sqrt{74}/\sqrt{365}}\right) \simeq 1 - \Phi(1.156) = 0.1238.$$

Esercizio 2. Un congegno è costituito da una componente elettrica che viene rimpiazzata non appena smette di funzionare. Dunque, se $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sono i tempi di vita di n componenti che si hanno a disposizione, il tempo di vita totale del congegno è $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$. Si supponga che $T_i \sim \mathrm{Exp}(1)$, e che le T_i siano indipendenti. Utilizzando l'approssimazione normale, si calcolino:

(i) se $n = 100$ la probabilità $\mathrm{P}(T < 90)$;

(ii) il valore minimo di n per cui $\mathrm{P}(T < 90) \leq 0.05$.

Soluzione 2. (i) Ricordando che media e deviazione standard di una variabile aleatoria $\mathrm{Exp}(\lambda)$ valgono entrambe $1/\lambda$, le variabili T_i hanno media e deviazione standard pari a

$$\mu = 1\,, \qquad \sigma = 1\,.$$

Usando l'approssimazione normale, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T < 90) &= \mathrm{P}\left(\frac{T - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{90 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \mathrm{P}\left(Z < \frac{90 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{90 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{90 - 100}{\sqrt{100}}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 \approx 0.1587\,.\end{aligned}$$

(ii) Usando i calcoli del punto precedente, otteniamo

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(T < 90) \approx \Phi\left(\frac{90 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leq 0.05 \quad \iff \quad 1 - \Phi\left(\frac{90 - n}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \\ &\iff \quad \Phi\left(\frac{n - 90}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \quad \iff \quad \frac{n - 90}{\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}(0.95) \approx 1.645\,,\,,\end{aligned}$$

Otteniamo quindi una disequazione di secondo grado nella variabile $\sqrt{n}$:

$$(\sqrt{n})^2 - 1.645\sqrt{n} - 90 \geq 0\,,$$

le cui soluzioni positive sono date da

$$\sqrt{n} \geq \frac{1}{2}\big(1.645 + \sqrt{1.645^2 + 4 \cdot 90}\big) \approx 10.345\,,$$

ossia $n \geq (10.345)^2 \approx 108$.

Esercizio 3. Un grande studio fotografico riceve l'incarico di eseguire un servizio che prevede l'uso di speciali lampade ad alta luminosità. La durata di tali lampade ha distribuzione esponenziale di media uguale a 100 ore, e costano 100 Euro l'una. Le durate di lampade distinte si possono considerare indipendenti. Per il servizio si prevede siano necessarie 10 000 ore di luce prodotta da tali lampade. Inoltre, a causa degli elevati costi di trasporto, è conveniente acquistare le lampade necessarie in un unico ordine.

(i) Usando l'approssimazione normale, si determini il minimo numero di lampade che è necessario acquistare affinché le 10000 ore di luce siano garantite con probabilità 0.95.

(ii) Un'altra ditta di lampade propone un prodotto la cui durata ha distribuzione esponenziale di media 200 ore, al costo di 190 Euro per lampada. Ritenete sia conveniente acquistare da questa ditta anziché da quella del punto precedente? (Anche in questo caso le lampade vengono acquistate nel numero minimo necessario a garantire 10000 ore di luce con probabilità 0.95).

Soluzione 3. (i) Indicando con X_i la durata in ore dell'i-esima lampadina, assumiamo che $X_1, X_2, \ldots$ siano variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$, dove $\lambda := 1/\mu = 1/100$ (si ricordi che $\mathrm{E}(\mathrm{Exp}(\lambda)) = 1/\lambda$). La deviazione standard delle X_i vale

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \mu = 100\,.$$

Posto $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, la condizione da verificare è dunque

$$\mathrm{P}(S_n \geq N_0) \geq 0.95\,, \qquad \text{dove} \quad N_0 := 10\,000\,.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_n \geq N_0) &= \mathrm{P}\left(\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{N_0 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{N_0 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Phi(z)\,, \qquad \text{avendo posto} \quad z := \frac{N_0 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\,, \end{aligned} \tag{0.1}$$

Sostituendo i valori di σ e μ, abbiamo che il numero minimo di lampade da acquistare è dato da

$$\sqrt{n} \geq \frac{1}{2\mu}\left(\sigma\Phi^{-1}(0.95) + \sqrt{\sigma^2\Phi^{-1}(0.95)^2 - 4\mu \cdot N_0}\right) \approx 10.86\,, \tag{0.2}$$

ovvero

$$n \geq (10.86)^2 \approx 118\,.$$

(ii) Dato che ogni lampada considerata nel primo punto ha un costo 100 euro, il prezzo totale per acquistare 118 lampade è pari a 11 800 euro. Determiniamo ora il numero di lampade della seconda ditta che sarebbe necessario acquistare: con i nuovi dati $\mu = 200$, $\sigma = 200$ (e ancora $N_0 = 10000$) si ottiene

$$\sqrt{n} \geq 7.94\,, \qquad \text{ossia} \qquad n \geq (7.94)^2 \approx 64\,,$$

per un costo totale di $64 \cdot 190 = 12\,160$ euro. Le lampade della seconda ditta sono dunque meno convenienti, nonostante durino il doppio costando meno del doppio!

Esercizio 4. * Sia considerino, per $n \geq 1$ delle variabili aleatorie X_n, geometriche di parametro $1/n$. Mostrare che le variabili aleatorie $\frac{X_n}{n}$ convergono in distribuzione ad una variabile aleatoria $Y \sim Exp(1)$.

Soluzione 4. La convergenza in distribuzione segue dalla corrispondente convergenza delle funzioni di ripartizione: dobbiamo cioè verificare che, per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \leq t\right) = P(Y \leq t)$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} > t\right) = P(Y > t) = e^{-t}.$$

Ricordiamo che, se X è una variabile geometrica di parametro p, allora $P(X > n) = (1-p)^n$. Per $x \in \mathbb{R}$, denotiamo con $\lfloor x \rfloor$ la parte intera di x, cioè il più grande intero minore o uguale a x. Abbiamo

$$P\left(\frac{X_n}{n} > t\right) = P(X_n > tn) = P(X_n > \lfloor tn \rfloor) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn \rfloor}.$$

Quindi, poiché la differenza fra tn e $\lfloor tn \rfloor$ è trascurabile nel limite $n \to +\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} > t\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn \rfloor} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{tn} = e^{-t}.$$