

Esercizio Sia $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ una sequenza di v.a. indipendenti tali che $X_n \sim \text{Exp}(\frac{1}{2^n})$

a) Studiare la convergenza in distribuzione delle X_n

b) Posto $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, calcolare la f. di ripartizione di Z_n

c) Studiare la convergenza in distribuzione delle Z_n

Dire che X_n converge in distribuzione a X significa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se } X \sim \text{Exp}(\lambda) \quad F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(x)$$

$$\text{a) } F_{X_n}(x) = (1 - e^{-\frac{1}{2^n} x}) \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(x)$$

Abbiamo che $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = 0$

La funzione $F(x) \equiv 0$ non è la f. di ripartizione di alcuna v.v. Quindi X_n non converge in distribuzione.

$$b) Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$P(Z_n > x) = P(X_1 > x, \dots, X_n > x) = \prod_{k=1}^n P(X_k > x)$$

$$\text{Ma } P(X_k > x) = \begin{cases} e^{-x/2^k} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{altim.} \end{cases}$$

$$\text{Allora } P(Z_n > x) = \begin{cases} \exp\left[-x \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}\right] & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Cioè, posto $\lambda_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$

$$F_{Z_n}(n) = (1 - e^{-\lambda_n x}) \mathbb{1}_{[n, +\infty)}(x) \Rightarrow Z_n \sim \text{Exp}(\lambda_n)$$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(n) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(x)$

dove $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$

Quindi Z_n converge in distribuzione a

$$Z \sim \text{Exp}(1)$$

Esercizio Siano (X, Y) congiuntamente continue
con densità

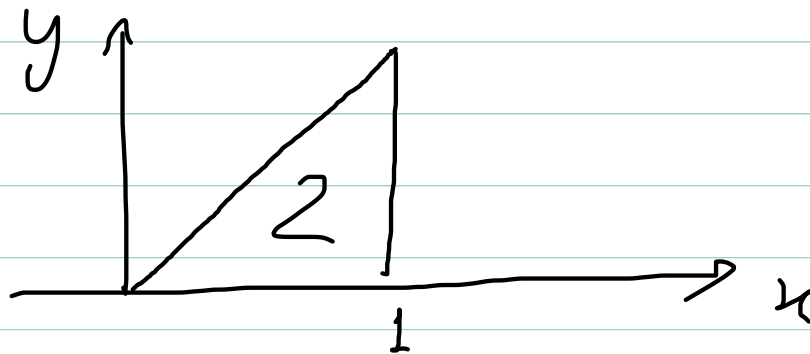
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare:

a) $f_X(x)$

b) $E[Y|X]$

c) Usare b) per calcolare $E(Y)$



$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1] \\ \int_0^x 2 \, dy = 2x & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$b) f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\mathbb{1}_{[0,x]}(y)}{2x} \quad \text{for } x \in [0,1]$$

$$E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x) \, dy = \frac{1}{2x} \int_0^x y \, dy = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow E(Y|X) = \frac{X}{2}$$

$$c) E(Y) = E[E(Y|X)] = E\left[\frac{X}{2}\right] = \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = \frac{1}{3}$$

Esercizio Supponiamo di avere una moneta
in cui esce testa con probab. p .

Lanciamo la moneta fino a quando
otteniamo la prima testa. Sia X il numero
di lanci effettuati. A questo punto lanciamo
nuovamente la moneta X volte, e sia
 Y il numero di teste ottenute in questi
 X lanci.

a) Calcolare $E(Y)$

b) Calcolare $P(Y=0)$

$$X \sim \text{Ge}(p) \quad P(Y=k | X=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

$$\text{Quindi } P_{X,Y}^{(n,k)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot p(1-p)^{n-1}$$

$$P(Y=k) = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} p (1-p)^{n-1} = ?$$

$$a) E(Y) = E[E(Y|X)]$$

$$E(Y|X=n) = np \Rightarrow E(Y|X) = pX$$

$$\text{Quindi } E[Y] = E[pX] = p E[X] = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

$$b) P(Y=0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n p (1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{2n}$$

$$= \frac{p}{1-p} \frac{1}{1-(1-p)^2}$$

Esercizio Siano X e Y congiuntamente continue con

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Calcolare c

b) Trovare f_X e f_Y

c) Calcolare, per $x, y \in \mathbb{R}$, $P(X \leq x, Y \leq y)$

d) Dire se X e Y sono indipendenti.

$$a) \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) = 1 \Leftrightarrow c \int_0^1 \left[\int_0^1 (x+y) dx \right] dy = 1$$

$$M_0 = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x+y) dx \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 + xy \right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} + y \right] dy = \frac{1}{2} + \int_0^1 y dy = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$b) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^1 (x+y) dy \quad \parallel_{[0,1]}(x)$$

$$= \parallel_{[0,1]}(x) \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \parallel_{[0,1]}(x) \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

$$f_Y(y) = \parallel_{[0,1]}(y) \left(y + \frac{1}{2} \right)$$

$$d) f_X(x) f_Y(y) = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2}) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = (x+y) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

Se fossero indipendenti si avrebbe

$$(x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2}) = x + y \quad \forall x \in [0,1] \quad y \in [0,1]$$

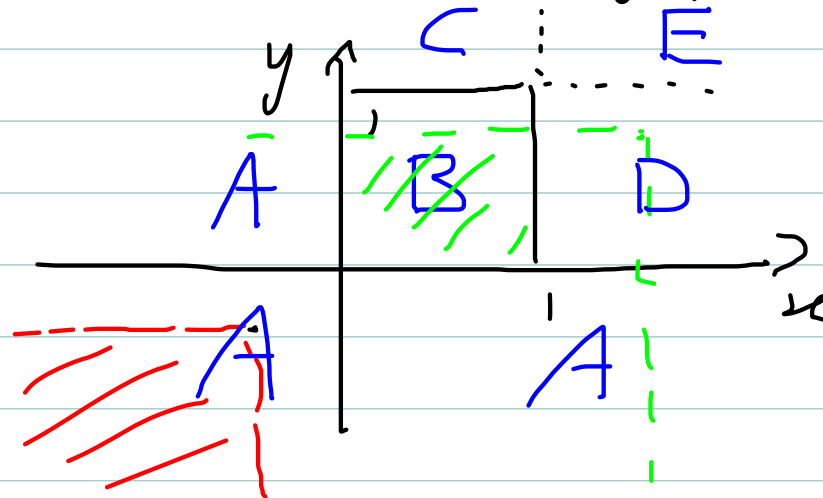
il che è falso.

c) $P(X \leq x, Y \leq y)$. Ricordiamo che se $C \subseteq \mathbb{R}^2$

$$P((X, Y) \in C) = \iint_C f_{X,Y}(u, v) du dv$$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P((X, Y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y])$$

$$= \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) dv \right) du$$



$$\text{Se } (x, y) \in A \quad P(X \leq x, Y \leq y) = 0$$

$$\text{Se } (x, y) \in E \quad P(X \leq x, Y \leq y) = 1$$

$$\bullet (x, y) \in B \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \int_0^x \left[\int_0^y (u+v) dv \right] du =$$

$$= \int_0^x \left[uv + \frac{v^2}{2} \right]_0^y du = \int_0^x \left[uy + \frac{y^2}{2} \right] du = \left[\frac{u^2}{2} y + \frac{y^2}{2} u \right]_0^x$$

$$= \frac{x^2}{2} y + \frac{xy^2}{2}$$

$$\bullet (x, y) \in C \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y > 1$$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq 1) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

$$\bullet (x, y) \in D \quad x > 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq 1, Y \leq y) = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}$$

Durante tutto il periodo estivo nuovo
per appuntamento

All'esame portare

1. Tavola della normale
2. Formulario (unico foglio A4)
3. Calcolatrice
4. Documento con foto

Ricordare: iscrizione a università e nel caso
si decide di non sostenere l'esame di
cancellare l'iscrizione.