ESERCIZI - FASCICOLO 11

Esercizio 1. Un lanciatore di giavellotto esegue $n \in \mathbb{N}$ lanci. Detta X_i la distanza ottenuta nell'i-esimo lancio, supponiamo che $X_1, \dots, X_n$ siano variabili aleatorie indipendenti con $X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, dove $\lambda \in (0,\infty)$. Indichiamo con M_n la massima distanza a cui è stato lanciato il giavellotto. Si determini la densità di M_n.

Soluzione 1. Dato che $f_{X_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$, si ottiene

$$F_{X_1}(x) \,=\, \mathrm{P}(X_1 \le x) \,=\, \int_{-\infty}^{x} f_{X_1}(t)\,\mathrm{d}t \,=\, \big(1 - e^{-\lambda x}\big)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,. \tag{0.1}$$

Allora

$$F_{M_n}(x) = [F_{X_1}(x)]^n = \big(1 - e^{-\lambda x}\big)^n \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

da cui

$$f_{M_n}(x) = F'_{M_n}(x) = n\big(1 - e^{-\lambda x}\big)^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Esercizio 2. Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorieindipendenti con distribuzione $U(0,1)$, e definiamo

$$L_n := \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}\,, \qquad Z_n \,:=\, n L_n\,.$$

Si mostri che la funzione di ripartizione $F_{Z_n}(t)$ converge per $n \to \infty$ verso un limite $F(t)$, che è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria $Exp(1)$.

Soluzione 2. Per $x \in [0,1]$ si ha $\mathrm{P}(L_n > x) = \mathrm{P}(X_1 > x)^n = (1-x)^n$, quindi

$$F_{L_n}(x) = 1 - (1-x)^n\,,$$

mentre chiaramente $F_{L_n}(x) = 0$ se $x \le 0$ e $F_{L_n}(x) = 1$ se $x \ge 1$.

Per ogni $t \ge 0$ fissato, si ha che $t/n \in [0,1]$ per n grande e dunque

$$F_{Z_n}(t) = \mathrm{P}(Z_n \le t) = \mathrm{P}(L_n \le \tfrac{t}{n}) = 1 - (1 - \tfrac{t}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-t}\,.$$

Per $t < 0$ si ha $F_{Z_n}(t) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = 0$. In definitiva,

$$F(t) \,:=\, \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) \,=\, \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{se } t \ge 0 \end{cases},$$

che è proprio la funzione di ripartizione della distribuzione $\mathrm{Exp}(1)$.

Esercizio 3. Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie indipendenti. $U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(i) Si mostri che le variabili aleatorie $(Y_n := X_n + \frac{1}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ sono $U(0,1)$.

(ii) Si mostri che per ogni $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\big(\min\{X_1, \dots, X_n\} < -\tfrac{1}{2} + \tfrac{r}{n}\big) \,=\, 1 - e^{-r}\,.$$

Soluzione 3. (i) Le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti perché sono ottenute a partire da variabili aleatorie indipendenti applicando la stessa funzione $x \mapsto x + \frac{1}{2}$. La verifica che siano $U(0,1)$ è facile: chiaramente Y_n assume valori in $(0,1)$, visto che X_n assume valori in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, e per $y \in (0,1)$ si ha

$$F_{Y_n}(y) = \mathrm{P}(Y_n \le y) = \mathrm{P}(X_n \le y - \tfrac{1}{2}) = F_{X_n}(y - \tfrac{1}{2}) = (y - \tfrac{1}{2}) - (-\tfrac{1}{2}) = y.$$

(ii) Basta notare che

$$\left\{ \min\{X_1,\dots,X_n\} < -\tfrac{1}{2} + \tfrac{r}{n} \right\}^c = \left\{ \min\{Y_1,\dots,Y_n\} < \tfrac{r}{n} \right\}^c = \left\{ Y_1 \ge \tfrac{r}{n}, \dots, Y_n \ge \tfrac{r}{n} \right\},$$

da cui segue che

$$\mathrm{P}\left(\min\{X_1,\dots,X_n\} < -\tfrac{1}{2} + \tfrac{r}{n} \right) = 1 - \left(1 - \tfrac{r}{n}\right)^n \to 1 - e^{-r} \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Esercizio 4. Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorie Geometriche indipendenti di parametro p. Determinare la densita' discreta di $Y := \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e di $Z := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Soluzione 4. Sappiamo che,

$$F_{X_i}(k) = 1 - (1-p)^{k+1}.$$

Dunque

$$F_Z(k) = \left[1 - (1-p)^{k+1}\right]^n.$$

Infine

$$p_Z(k) = F_Z(k) - F_Z(k-1) = \left[1 - (1-p)^{k+1}\right]^n - \left[1 - (1-p)^{k}\right]^n.$$

Analogamente,

$$F_W(k) = 1 - \left[(1-p)^{k+1}\right]^n = 1 - [(1-p)^n]^{k+1},$$

che coincide con la funzione di ripartizione di una variabile casuale Geometrica di parametro $1-(1-p)^n$. Poichè la funzione di ripartizione individua completamente la distribuzione, possiamo concludere che

$$W \sim Ge(1-(1-p)^n).$$

Esercizio 5. Siano X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ, e Y una variabile aleatoria di Poisson di parametro μ, tra loro indipendenti. Si ponga $Z = X - Y$.

(a) Calcolare la funzione generatrice dei momenti di Z.

(b) Calcolare $E(Z^3)$.

Soluzione 5. (a)

$$m_Z(t) = E\left(e^{t(X-Y)}\right) = E(e^{tX})E(e^{-tY}) = m_X(t)m_Y(-t) = e^{\lambda(e^t-1)}e^{\mu(e^{-t}-1)}.$$

(b) Con paziente calcolo

$$E(Z^3) = m_Z'''(0) = (\lambda-\mu)[(\lambda-\mu)^2 + 3(\lambda+\mu)+1].$$

Esercizio 6. Sia X una variabile aleatorie continua, con densità

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Calcolare la funzione generatrice dei momenti, la media e la varianza di X.

Soluzione 6. Per $-1 < t < 1$:

$$\begin{aligned} m(t) = E(e^{tX}) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}e^{-|x|}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{tx}e^{-x}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-} e^{tx}e^{x}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t^2}. \end{aligned}$$

Ne segue:

$$E(X) = m'(0) = 0, \;\; Var(X) = E(X^2) = m''(0) = 2.$$

Esercizio 7. Siano X e Y variabili aleatorie congiuntamente continue, con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{5} + cy & \text{se } 0 < x < 1, \; 1 < y < 5 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Si determini il valore di c.

(b) Si calcoli $E(X|Y)$ e $E(X^2|Y)$.

Soluzione 7. Anzitutto

$$1 = \int f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_1^5 dy \left[\frac{x}{5} + cy\right] = \frac{2}{5} + 2c$$

da cui $c = \frac{1}{20}$. Inoltre

$$f_Y(y) = \int f(x,y)dx = \left(\frac{y}{20} + \frac{1}{10}\right)\mathbf{1}_{(1,5)}(y),$$

da cui

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4x+y}{2+y}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)\mathbf{1}_{(1,5)}(y).$$

Inoltre, per $y \in (1,5)$

$$\int x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^1 x\frac{4x+y}{2+y}dx = \frac{\frac{4}{3}+\frac{y}{2}}{2+y}$$

e

$$\int x^2 f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^1 x^2\frac{4x+y}{2+y}dx = \frac{1+\frac{y}{3}}{2+y}.$$

Perciò

$$E(X|Y) = \frac{\frac{4}{3}+\frac{Y}{2}}{2+Y}, \;\; E(X^2|Y) = \frac{1+\frac{Y}{3}}{2+Y}.$$

Esercizio 8. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, tali che, per $k = 1,2,\dots,n$, $P(X=k) = P(Y=k) = \frac{1}{n}$. Posto $Z = \frac{X+Y}{2}$, calcolare $E(Z|X)$ e $E(X|Z)$.

Soluzione 8. Anzitutto

$$E(Z|X) = E\left(\frac{X+Y}{2}|X\right) = \frac{X}{2} = \frac{E(Y)}{2},$$

dove abbiamo usato alcune note proprietà del valor medio condizionato. Resta da calcolare

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2},$$

sicché $E(Z|X) = \frac{X}{2} + \frac{n+1}{4}$.

Calcoliamo ora $E(X|Z=z)$. Si noti anzitutto che $P(Z=z) > 0$ se e solo se $2 \le 2z \le 2n$, e $2z$ intero. Per ogni tale z e per $x = 1,2,\dots,n$,

$$\begin{aligned}
p_{X,Z}(x,z) &= P(X=x, X+Y=2z) = P(X=x, Y=2z-x) = P(X=x)P(Y=2z-x) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } 1 \le 2z-x \le x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n^2} \text{ se } \begin{cases} 1 \le x \le 2z-1 \text{ e } 2 \le 2z \le n \\ \text{oppure} \\ 2z-n \le x \le n \text{ e } n < 2z \le 2n \end{cases} \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}$$

Perciò

$$p_Z(z) = \sum_x p_{X,Z}(x,z) = \begin{cases} \frac{2z-1}{n^2} & \text{se } 2 \le 2z \le n \\ \frac{2n-2z+1}{n^2} & \text{se } n < 2z \le 2n \end{cases}$$

e

$$p_{X|Z}(x|z) = \begin{cases} \frac{1}{2z-1} & \text{se } 1 \le x \le 2z-1 \text{ e } 2 \le 2z \le n \\ \frac{1}{2n-2z+1} & \text{se } 2z-n \le x \le n \text{ e } n < 2z \le 2n \end{cases}$$

Quindi: se $2 \le 2z \le n$

$$E(X|Z=z) = \frac{1}{2z-1}\sum_{x=1}^{2z-1} x = \frac{1}{2z-1}\frac{(2z-1)2z}{2} = z$$

e se $n < 2z \le 2n$

$$\begin{aligned}
E(X|Z=z) &= \frac{1}{2n-2z+1}\sum_{x=2z-n}^{n} x \\
&= \frac{1}{2n-2z+1}\left[\sum_{1}^{n} x - \sum_{1}^{2z-n-1} x\right] \\
&= \frac{1}{2n-2z+1}\left[\frac{n(n+1}{2} - \frac{(2n-2z+1)(2n-2z)}{2}\right] \\
&= z
\end{aligned}$$

e quindi $E(X|Z) = Z$.

Esercizio 9. Siano X e Y variabili aleatorie congiuntamente continue, con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}e^{-|x-y|}e^{-|y|}.$$

a. Calcolare la densità condizionata $f_{X|Y}$ e il valor medio condizionato $E(X|Y)$.
b. Calcolare $E(X)$ *senza* calcolare la densità f_X.

Soluzione 9. a.

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx = \frac{1}{4}e^{-|y|}\int e^{-|x-y|}dx = \frac{1}{2}e^{-|y|}.$$

Pertanto

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{2}\int e^{-|x-y|}.$$

Per simmetria $E(X|Y) = Y$.

b.

$$E(X) = E[E(X|Y)] = E(Y) = 0,$$

com'è ovvio dal fatto che la densità di Y è pari.

Esercizio 10. Siano X e Y due variabili continue la cui densità congiunta è

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{(1+x)^3} & \text{se } 0 < y < x \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Determinare la densità marginale f_X della variabile aleatoria X.
(b) Calcolare $E\left(\frac{1}{X}\right)$.
(c) Calcolare il valor medio condizionato $E(Y|X)$
(d) Posto $Z = \sqrt{X}$, si determini la densità della variabile aleatoria Z.

Soluzione 10. (a)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \frac{2x}{(1+x)^3} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(b)

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+x)^3} dx = -\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

(c) Notare che

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } 0 < y < x \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Essendo allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} \int_0^x y dy = \frac{x}{2},$$

abbiamo che $E(Y|X) = \frac{X}{2}$.

(d) Per $z > 0$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z^2) = F_X(z^2).$$

Derivando:

$$f_Z(z) = 2zF_X'(z^2) = \begin{cases} \frac{4z^3}{(1+z^2)^3} & \text{se } z > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 11. (a) Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare il valor medio e la varianza di X.

(b) Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con la stessa distribuzione della X al punto (a). Si ponga

$$Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Si determini la funzione di ripartizione (anche detta funzione di distribuzione) di Y_n.

(c) Posto $W_n = \sqrt{n} Y_n$, mostrare che, per $n \to +\infty$, W_n converge in distribuzione ad una variabile aleatoria W, di cui va determinata la densità.

Soluzione 11. (a)

$$E(X) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$E(X^2) = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

(b) Si ha

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 1 \\ \int_0^x 2t\,dt = x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Perciò

$$F_{Y_n}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 1 \\ 1 - (1 - x^2)^n & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(c) Si tratta di determinare il limite della funzione di ripartizione F_{W_n} di W_n. Abbiamo, per $x > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} F_{W_n}(x) &= \lim_{n \to +\infty} P(W_n \leq x) = \lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq x/\sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \to +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = 1 - e^{-x^2} = F_W(x), \end{aligned}$$

dove W è la variabile continua con densità

$$f_W(x) = F'_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

Esercizio 12. Da un'urna che contiene N palline numerate da 1 a N si eseguono due estrazioni *con reimmissione*.

(a) Qual è la probabilità che si estragga entrambe le volte la pallina con il numero 1?

(b) Qual è la probabilità che nelle due estrazioni si estragga la stessa pallina?

(c) Sia X il più piccolo dei due numeri estratti, e Y il più grande. Si determini la densità congiunta di X e Y.

(d) Si determini la densità condizionata $p_{X|Y}$.

Soluzione 12. (a) $\frac{1}{N^2}$.

(b) Detto A l'evento in questione,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(\text{estraggo due volte la pallina } i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}.$$

(c) Se $1 \leq i < j \leq N$,

$$P(X = i, Y = j) = P(\text{estraggo la coppia ordinata } (i, j)) + P(\text{estraggo la coppia ordinata } (j, i)) = \frac{2}{N^2};$$

Se $1 \leq i \leq N$

$$P(X = i, Y = i) = P(\text{estraggo la coppia ordinata } (i, i)) = \frac{1}{N^2};$$

In tutti gli altri casi $P(X = i, Y = j) = 0$.

(d)
$$p_Y(j) = \sum_{i=1}^{j} p_{X,Y}(i,j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N^2} + \frac{1}{N^2} = \frac{2j-1}{N^2}.$$

Pertanto
$$p_{X|Y}(i|j) = \begin{cases} \frac{2}{2j-1} & \text{se } 1 \le i < j \\ \frac{1}{2j-1} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 13. Siano X e Y due variabili aleatorie congiuntamente continue, la cui densità congiunta è data dalla formula

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Calcolare le densità marginali di X e Y.
(b) Calcolare i valori attesi condizionati $E(Y|X)$ e $E(e^{-Y}|X)$.
(c) Calcolare il valore atteso condizionato $E(X|Y)$.

Soluzione 13. (a) Per $x > 0$

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)} dy = xe^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-xy} dy = e^{-x},$$

mentre $f_X(x) = 0$ se $x \le 0$. Per $y > 0$

$$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)} dx = \frac{1}{y+1} \int_0^{+\infty} x(y+1)e^{-x(y+1)} dx = \frac{1}{(1+y)^2}$$

e $f_Y(y) = 0$ se $y \le 0$, dove abbiamo usato il fatto che $\int_0^{+\infty} x(y+1)e^{-x(y+1)} dx$ è la media di una esponenziale di parametro $1 + y$.

(b) Poiché, per $x, y > 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = xe^{-xy},$$

abbiamo

$$E(Y|X = x) = \int_0^{+\infty} xye^{-xy} dy = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; E(Y|X) = \frac{1}{X}$$

$$E(e^{-Y}|X = x) = \int_0^{+\infty} xe^{-y}e^{-xy} dy = \frac{x}{x+1} \;\Rightarrow\; E(e^{-Y}|X) = \frac{X}{X+1}$$

(c)
$$f_{X|Y}(x|y) = (1+y)^2 \frac{xe^{-x(y+1)}}{},$$

da cui

$$E(X|Y=y) = (1+y)^2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x(y+1)} dx = (1+y) \int_0^{+\infty} x^2 (y+1) e^{-x(y+1)} dx = \frac{2}{(y+1)},$$

dove abbiamo usato il fatto che $\int_0^{+\infty} x^2 (y+1) e^{-x(y+1)} dx$ è il momento secondo di una esponenziale di parametro $(1+y)$. Dunque

$$E(X|Y) = \frac{2}{(Y+1)}.$$

Esercizio 14. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti, continue con densità

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione F_{X_n}.

(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_{Y_n} di

$$Y_n := \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

(c) Si ponga $Z_n := \sqrt{n} Y_n$. Si mostri che per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione di ripartizione $F_{Z_n}(x)$ converge ad un limite $F(x)$. (*Sugg.:* si ricordi il limite fondamentale $\lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, per $a \in \mathbb{R}$)

(d) Mostrare che $F(x)$ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua, e se ne calcoli la densità.

Soluzione 14. (a)

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{y}{2} dy = \frac{x^2}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

(b)

$$F_{Y_n}(y) = 1 - (1 - F_{X_n}(x))^n.$$

(c) Per $z \geq 0$,

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = P(Y_n \leq z/\sqrt{n}) = 1 - \left(1 - F_{X_n}(z/\sqrt{n})\right)^n.$$

Perciò

$$F(z) = \lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(z) = \lim_{n \to +\infty} \left[1 - \left(1 - F_{X_n}(z/\sqrt{n})\right)^n\right] = \lim_{n \to +\infty} \left[1 - \left(1 - z^2/4n\right)\right)^n\right] = 1 - e^{-z^2/4}.$$

(d) F è derivabile con derivata continua, quindi è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua, con densità

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} e^{-z^2/4} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 15. Un concorso ha lo scopo di assegnare l'idoneità ad una data mansione. Prima del concorso è possibile, ma non obbligatorio, frequentare un corso di preparazione. Assumiamo che ogni candidato, indipendentemente dagli altri, abbia probabilità 0.25 di risultare idoneo se ha frequentato il corso di preparazione, e 0.15 se non l'ha frequentato. Al concorso si presentano 10 candidati, di cui 5 hanno frequentato il corso di preparazione. Sia X il numero di idonei fra coloro che hanno frequentato il corso di preparazione, e Y il numero di idonei fra gli altri. Sia infine Z il numero totale di idonei.

(a) Determinare le densità discrete di X e Y.
(b) Calcolare $Var(Z)$.
(c) Calcolare la probabilità $P(Z=3)$.
(d) Calcolare $E(X|Z=3)$.

Soluzione 15. (a) $X \sim B(5, 0.25)$, $Y \sim B(5, 0.15)$.

(b) X e Y sono indipendenti, $Z = X + Y$, per cui

$$Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = 5 \cdot 0.25 \cdot 0.75 + 5 \cdot 0.15 \cdot 0.85 = 1.575.$$

(c)

$$\begin{aligned}
&P(Z=3) = P(X=3)P(Y=0) + P(X=2)P(Y=1) + P(X=1)P(Y=2) + P(X=0)P(Y=3) \\
&= \binom{5}{3}(0.25)^3(0.75)^2\binom{5}{0}(0.85)^5 + \binom{5}{3}(0.25)^2(0.75)^3\binom{5}{0}(0.15)(0.85)^4 \\
&+ \binom{5}{3}(0.25)(0.75)^4\binom{5}{0}(0.15)^2(0.85)^3 + \binom{5}{3}(0.75)^5\binom{5}{0}(0.15)^3(0.85)^2 \simeq 0.203
\end{aligned}$$

(d) Osserviamo che

$$P(X=k|Z=3) = \frac{P(X=k, Y=3-k)}{P(Z=3)} = \frac{P(X=k)P(Y=3-k)}{P(Z=3)}.$$

Per cui

$$\begin{aligned}
&E(X|Z=3) = \sum_{k=0}^{3} k \frac{P(X=k)P(Y=3-k)}{P(Z=3)} \\
&= \frac{1}{P(Z=3)}\left[\binom{5}{3}(0.25)(0.75)^4\binom{5}{0}(0.15)^2(0.85)^3 + 2\binom{5}{3}(0.25)^2(0.75)^3\binom{5}{0}(0.15)(0.85)^4\right. \\
&\qquad \left. +3\binom{5}{3}(0.25)^3(0.75)^2\binom{5}{0}(0.85)^5\right] \simeq 1.134
\end{aligned}$$