Prova Scritta di **Istituzioni di Calcolo delle Probabilità** 20 Giugno 2016 Prof. PAOLO DAI PRA	Cognome: ____________ Nome: ____________ Matricola: ____________

TEMA A

Esercizio 1. Da un mazzo di 52 carte da Poker si estraggono, una dopo l'altra e senza reimmissione, 4 carte.

(a) Qual è la probabilità che la terza carta estratta sia di fiori?

(b) Qual è la probabilità che la prima e la terza carta siano due assi?

(c) Sapendo che tra le carte estratte ci sono esattamente due assi, qual è la probabiltà che fra le carte estratte ci sia anche il 3 di fiori?

(d) Supponiamo ora che il mazzo fosse stato manomesso: qualcuno ha tolto una carta, scegliendola a caso dal mazzo. Qual è la probabilità che la prima carta estratta dal mazzo manomesso sia di fiori?

Soluzione 1. (a) È la stessa probabilità che la prima sia di fiori, cioè $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

(b) Di nuovo per simmetria è la stessa probabilità che la prima e la seconda siano due assi, cioè, usando le disposizioni senza ripetizione, $\frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51}$.

(c) Definiamo gli eventi: $A =$ "ci sono esattamente due assi", e $B =$ "c'è il 3 di fiori". Poiché tali eventi non dipendono dall'ordine di estrazione, possiamo prendere come spazio campionario le combinazioni. Notando che

$$|A| = \binom{4}{2}\binom{48}{2}, \quad |A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot 47,$$

abbiamo che

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{\binom{4}{2} \cdot 47}{\binom{4}{2}\binom{48}{2}}.$$

(d) Poiché la manomissione può essere pensata come una prima estrazione, la domanda può essere riformulata così: se si estraggono 6 carte, qual è la probabilità che la seconda carta estratta sia di fiori? La risposta è, come in (a), $\frac{1}{4}$.

Esercizio 2. Un'urna contiene 5 palline, 3 rosse e 2 nere. Cominciamo ad effettuare estrazioni *con reimmissione*, fermandoci quando estraiamo per la prima volta una pallina nera. Sia X il numero di estrazioni effettuate. A questo punto lanciamo X volte una moneta equilibrata, e denotiamo con Y il numero di teste ottenute.

(a) Qual è la densità di X?

(b) Qual è la densità condizionata $p_{Y|X}(y|x)$? E il valor medio condizionato $E(Y|X)$?

(c) Calcolare $E(Y)$.

(d) Calcolare le probabilità $P(Y = 0)$ e $P(Y = 1)$.

Soluzione 2. (a) $X \sim Ge(2/5)$

(b)
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \binom{x}{y}\frac{1}{2^x},$$
cioè la densità di una binomiale di parametri x e $\frac{1}{2}$. Segue che
$$E(Y|X) = \frac{X}{2}.$$

(c)
$$E(Y) = E[E(Y|X)] = \frac{1}{2}E(X) = \frac{1}{2}\frac{5}{2} = \frac{5}{4}.$$

(d) Dai punti (a) e (b):
$$P(X = x, Y = y) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}\binom{x}{y}\frac{1}{2^x}$$
per $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq x$. Quindi, essendo $\binom{x}{0} = 1$,
$$P(Y = 0) = \frac{2}{5}\sum_{x\geq 1}\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}\frac{1}{2^x} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^n = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{3}{10}} = \frac{2}{7}.$$
Inoltre, essendo $\binom{x}{1} = x$,
$$P(Y = 1) = \frac{2}{5}\sum_{x\geq 1}x\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}\frac{1}{2^x} = \frac{1}{5}\sum_{x\geq 1}x\left(\frac{3}{10}\right)^{x-1} = \frac{1}{5}\frac{10}{7}\sum_{x\geq 1}x\frac{7}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^{x-1} = \frac{20}{49},$$
dove si usa il fatto che la somma
$$\sum_{x\geq 1}x\frac{7}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^{x-1}$$
è la media di una Geometrica di parametro $\frac{7}{10}$.

Esercizio 3. Una Banca ha effettuato prestiti a tre anni per un ammontare totale C = un miliardo di Euro. Considerati gli interessi e il rischio che qualcuno che ha avuto denaro in prestito non sia in grado di restituirlo, si ritiene che fra tre anni il capitale che verrà restituito alla banca sarà (in miliardi di Euro) X, dove X è una variabile aleatoria Normale di media 1.1 e deviazione standard 0.1.

(a) Qual è la probabilità che la Banca vada in perdita, cioè che il denaro restituito sia meno di quello prestato?

(b) Secondo la legislazione internazionale, alla Banca è richiesto di possedere un capitale liquido D che ha la seguente proprietà: $P(C - X > D) = 0.01$. Qual è il valore di D?

Soluzione 3. (a)
$$P(X < C) = P\left(\frac{X - 1.1}{0.1} < \frac{1 - 1.1}{0.1}\right) = \Phi(-1) \simeq 0.1587.$$

(b) Dev'essere

$$0.01 = P(1 - X > D) = \Phi\left(\frac{1 - D - 1.1}{0.1}\right) \iff 0.99 = \Phi\left(\frac{D + 0.1}{0.1}\right)$$
$$\iff \frac{D + 0.1}{0.1} = \Phi^{-1}(0.99) \iff D \simeq 0.133.$$

Esercizio 4. Le variabili aleatorie X e Y sono congiuntamente continue con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & \text{se } x \in [0, 1] \text{ e } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare $E(X)$ e $E(Y)$.

(b) Calcolare $Cov(X, Y)$.

Soluzione 4. (a)

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(x + 2y)\right] dy = \frac{2}{3}(x + 1)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(y) \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(x + 2y)\right] dx = \frac{1}{3}(4y + 1)\mathbf{1}_{[0,1]}(y),$$

da cui

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = \frac{5}{9}$$
$$E(Y) = \int_0^1 Y f_Y(y) dy = \frac{11}{18}.$$

(b) Con paziente calcolo

$$E(XY) = \frac{2}{3} \int_0^1 \int_0^1 xy(x + 2y) dx dy = \frac{1}{3},$$

da cui

$$Cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{162}.$$