Prova Scritta di **Istituzioni di Calcolo delle Probabilità** 20 Giugno 2016 Prof. PAOLO DAI PRA	Cognome: ____________ Nome: ____________ Matricola: ____________

TEMA B

Esercizio 1. Un'urna contiene 3 palline rosse e 3 palline nere. Le sei palline vengono estratte in sei estrazioni senza reimmissione. Consideriamo gli eventi:

$A =$ "vi sono almeno due estrazioni consecutive in cui le palline estratte hanno lo stesso colore"
$B =$ "la prima pallina estratta è rossa"
$C =$ "la prima pallina estratta è rossa e la sesta è nera"

(a) Calcolare $P(A)$.

(b) A e B sono indipendenti? E A e C? (Motivare adeguatamente la risposta)

Soluzione 1. (a) L'esito delle estrazioni si può descrivere assegnando le estrazioni corrispondenti alle palline rosse. Dunque, possiamo prendere come spazio campionario l'insieme delle combinazioni di tre oggetti scelti in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A^c contiene solo le due combinazioni a colori alterni. Quindi, essendo $\binom{6}{3} = 20$,

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{20} = 0.9.$$

(b) Ovviamente $P(B) = \frac{1}{2}$. Inoltre $|A^c \cap B| = 1$. Perciò

$$P(A^c \cap B) = \frac{1}{20} = P(A^c)P(B).$$

Allora A^c e B sono indipendenti, e quindi anche A e B.

Gli elementi di C corrispondono a scegliere per il rosso due delle estrazioni dalla seconda alla quinta, quindi $|C| = \binom{4}{2} = 6$. Inoltre $|A^c \cap C| = 1$. Perciò

$$P(A^c \cap C) = \frac{1}{20} \neq P(A^c)P(C) = \frac{1}{10}\frac{6}{20}.$$

Dunque A e C non sono indipendenti, non essendolo A^c e C.

Esercizio 2. Un ristorante ha nel suo menù il "peposo all'Imprunetina", un piatto di carne che richiede una lunga preparazione ma che deve essere servito lo stesso giorno in cui viene preparato. Il ristorante ha 200 posti, sempre tutti esauriti, e dall'esperienza si sa che il 20% dei clienti ordinano il peposo.

(a) Se vengono preparate 45 porzioni di peposo, qual è la probabilità che qualche cliente lo ordini ma non possa averlo in quanto esaurito?

(b) Quante porzioni devono essere preparate affinché esse risultino sufficienti per tutti i clienti che ordinano il peposo, con probabilità 0.99?

Soluzione 2. (a) Se X è il numero di porzioni ordinate, $X \sim B(200, 0.2)$. Usando l'approssimazioni normale con la correzioni di continuità (lecito essendo $200 \cdot 0.2 > 5$),

$$P(X > 45) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{45.5 - 40}{\sqrt{200 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) \simeq 0.166.$$

(b) Dobbiamo trovare n tale che $P(X \leq n) \geq 0.99$.

$$0.99 \leq P(X \leq n) \simeq \Phi\left(\frac{n + 0.5 - 40}{\sqrt{200 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) \iff \frac{n + 0.5 - 40}{\sqrt{200 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \geq \Phi^{-1}(0.99) \iff n \geq 53.$$

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} c\sqrt{x} & \text{per } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare il valore della costante c.

(b) Posto $Y = \sqrt{X}$, mostrare che Y è una variabile aleatoria continua e determinarne la densità.

(c) Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti, con la stessa distribuzione di X. Si ponga

$$M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Determinare la densità di M_n.

(d) Si ponga $V_n = n^{2/3} M_n$. Mostrare che le variabili aleatorie V_n convergono in distribuzione per $n \to +\infty$, e determinare la densità del limite.

Soluzione 3. (a) Essendo

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$$

si ha $c = \frac{3}{2}$.

(b) Notare che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{t}dt = x^{3/2} & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Allora

$$F_Y(y) = P(X \leq y^2) = F_X(y^2) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ y^3 & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

Poiché F_Y è continua e ha derivata continua (eccetto in $y = 1$, segue che Y è continua e

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = 3y^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$

(c)

$$1 - F_{M_n}(x) = (1 - F_X(x))^n .$$

Ne segue che

$$f_{M_n}(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} n (1 - x^{3/2})^{n-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

(d) $F_{V_n}(x) = 0$ se $x \le 0$. Se $x > 0$ per n sufficientemente grande $x/n^{2/3} \in [0,1]$, e in tal caso

$$F_{V_n}(x) = F_{M_n}(x/n^{2/3}) = 1 - \left(1 - \frac{x^{3/2}}{n}\right)^n.$$

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} F_{V_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 - e^{-x^{3/2}} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quindi V_n converge in distribuzione ad una variabile aleatoria continua V, con densità

$$f_V(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}e^{-x^{3/2}}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x).$$

Esercizio 4. Le variabili aleatorie X e Y sono congiuntamente continue con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x+y) & \text{se } x \in [0,1] \text{ e } y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare $E(X)$ e $E(Y)$.

(b) Calcolare $Cov(X,Y)$.

Soluzione 4. (a)

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(y) \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(2x+y)\right] dx = \frac{2}{3}(y+1)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$$

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(2x+y)\right] dy = \frac{1}{3}(4x+1)\mathbf{1}_{[0,1]}(x),$$

da cui

$$E(Y) = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \frac{5}{9}$$

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = \frac{11}{18}.$$

(b) Con paziente calcolo

$$E(XY) = \frac{2}{3}\int_0^1 \int_0^1 xy(2x+y) dx dy = \frac{1}{3},$$

da cui

$$Cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{162}.$$