Prova Scritta di **Istituzioni di Calcolo delle Probabilità** 8 Luglio 2016 Prof. PAOLO DAI PRA	Cognome: __________ Nome: __________ Matricola: __________

Esercizio 1. In una scuola ci sono 80 studentesse, di cui 32 hanno gli occhiali, e 120 studenti, di cui 60 hanno gli occhiali. Vengono scelti, a caso, due studenti.

(a) Qual è la probabilità che entrambi abbiano gli occhiali?

(b) Se entrambi hanno gli occhiali, qual è la probabilità che siano entrambi maschi?

(c) Se fra gli studenti scelti ce n'è almeno uno senza occhiali, qual è la probabilità che siano un maschio e una femmina?

Soluzione 1. (a) Gli studenti con occhiali sono 92. Quindi, se $A =$ "entrambi gli studenti scelti portano gli occhiali", si ha

$$P(A) = \frac{\binom{92}{2}}{\binom{200}{2}}.$$

(b) Sia $B =$ "entrambi gli studenti scelti sono maschi". Poiché i maschi con gli occhiali sono 60,

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{60}{2}}{\binom{200}{2}},$$

da cui

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\binom{60}{2}}{\binom{92}{2}}.$$

(c) Sia $C =$ "gli studenti scelti sono un maschio e una femmina". Dobbiamo calcolare $P(C|A^c)$. Notando che

$$P(C) = \frac{80 \cdot 120}{\binom{200}{2}},$$

e

$$P(A \cap C) = \frac{32 \cdot 60}{\binom{200}{2}},$$

abbiamo

$$P(A^c \cap C) = P(C) - P(A \cap C) = \frac{80 \cdot 120 - 32 \cdot 60}{\binom{200}{2}},$$

e quindi

$$P(C|A^c) = \frac{P(A^c \cap C)}{1 - P(A)} = \frac{80 \cdot 120 - 32 \cdot 60}{\binom{200}{2} - \binom{60}{2}}.$$

Esercizio 2. In un sito di *e-commerce* gli ordini arrivano secondo un processo di Poisson, con una media di 50 ordini al giorno.

(a) Se X è il numero di ordini che arrivano in un anno (365 giorni), qual è la distribuzione di X?

(b) Si calcoli approssimativamente la probabilità che in un anno arrivino meno di 17500 ordini.

(c) Un obiettivo del sito è di raggiungere, a partire da domani, i 20000 ordini. Fra quanti giorni questo obiettivo sarà raggiunto con probabilità 0.99?

Soluzione 2. (a) $X \sim Po(365 \cdot 50) = Po(18250)$.

(b) Notando che

$$X = \sum_{i=1}^{365} X_i$$

done X_i è il numero di ordini nell'i-esimo giorno dell'anno, usando l'approssimazione normale (la correzione di continuità qui è irrilevante)

$$P(X < 17500) = P\left(\frac{X - 18250}{\sqrt{18250}} < \frac{17500 - 18250}{\sqrt{18250}}\right) \simeq \Phi(-5.55) \simeq 0.$$

(c) Dev'essere

$$0.99 \leq P(X_1 + \cdots + X_n > 20000) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - 50n}{\sqrt{50n}} > \frac{20000 - 50n}{\sqrt{50n}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{50n - 20000}{\sqrt{50n}}\right).$$

Quindi

$$\frac{50n - 20000}{\sqrt{50n}} \geq \Phi^{-1}(0.99) = 2.33.$$

Scrivendo quest'ultima come equazione di secondo grado in $\sqrt{n}$, si trova $n \geq 407$.

Esercizio 3. Siano $X \sim Exp(\lambda)$ e $Y \sim Exp(\mu)$, con $\lambda > \mu > 0$, due variabili aleatorie indipendenti.

(a) Calcolare $P(X < Y)$.

(b) Posto $Z = X + Y$, determinare la densità congiunta di X e Z.

(c) Determinare la densità di Z.

(d) Calcolare $E(X|Z)$.

Soluzione 3. (a) Notare che

$$f_{X,Y}(x, y) = \lambda\mu e^{-\lambda x} e^{-\mu y} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x) \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(y).$$

Posto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ abbiamo

$$P(X < Y) = P((X, Y) \in B) = \int\int_B f_{X,Y}(x, y) dx dy = \lambda\mu \int_0^{+\infty} \left[\int_0^y e^{-\lambda x} dx\right] e^{-\mu y} dy$$
$$= \mu \int_0^{+\infty} \left[1 - e^{-\lambda y}\right] e^{-\mu y} dy = \mu \left[\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda + \mu}\right] = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

(b) Notando che

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ed essendo $\det(A) = 1$ e

$$A^{-}1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

abbiamo

$$f_{X,Z}(x,z) = f_{X,Y}(x, z-x) = \lambda\mu e^{-\lambda x} e^{-\mu(z-x)} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x) \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(z-x).$$

(c) Per $z > 0$,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x)dx = \lambda\mu \int_0^z e^{-\lambda x} e^{-\mu(z-x)} dx \\ &= \lambda\mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{(\mu-\lambda)x} dx = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu} e^{-\mu z} \left[1 - e^{(\mu-\lambda)z}\right] \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu} \left[e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}\right], \end{aligned}$$

mentre $f_Z(z) = 0$ se $z \leq 0$.

(d) Da quanto sopra, per $z > 0$,

$$f_{X|Z}(x|z) = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)} = (\lambda-\mu)e^{-(\lambda-\mu)x} \frac{1}{1-e^{-(\lambda-\mu)z}} \mathbf{1}_{[0,z]}(x),$$

da cui

$$\begin{aligned} E(X|Z=z) &= \frac{\lambda-\mu}{1-e^{-(\lambda-\mu)z}} \int_0^z x e^{-(\lambda-\mu)x} dx \\ &= \frac{1}{1-e^{-(\lambda-\mu)z}} \left[-x e^{-(\lambda-\mu)x} \Big|_0^z + \int_0^z e^{-(\lambda-\mu)x} dx \right] \\ &= \cdots = z + \frac{1}{\lambda-\mu} - \frac{z}{1-e^{-(\lambda-\mu)z}}. \end{aligned}$$

Infine

$$E(X|Z) = Z + \frac{1}{\lambda-\mu} - \frac{Z}{1-e^{-(\lambda-\mu)Z}}.$$

Esercizio 4. Un'urna contiene 6 palline, di cui due rosse, due nere e due bianche. Da essa estraggo, simultaneamente, due palline. Si considerino le seguenti variabili aleatorie Bernoulliane:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se almeno una delle palline estratte è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se almeno una delle palline estratte è nera} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare le densità p_X e p_Y.

(b) Determinare la densità congiunta $p_{X,Y}$.

(c) Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X,Y)$.

Soluzione 4. (a)

$$p_X(1) = 1 - p_X(0) = p_Y(1) = 1 - p_Y(0) = 1 - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{9}{15}$$

(b) Notare che $\{X = 1, Y = 1\}$ significa che è stata estratta una pallina rossa e una nera, il che corrisponde a 4 scelte possibili. Quindi

$$p_{X,Y}(1,1) = \frac{4}{\binom{6}{2}} = \frac{4}{15}.$$

$\{X = 0, Y = 0\}$ significa che sono state estratte le due palline bianche, e quindi

$$p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}.$$

Per simmetria, $p_{X,Y}(1,0) = p_{X,Y}(0,1)$, per cui

$$p_{X,Y}(1,0) = p_{X,Y}(0,1) = \frac{1 - p_{X,Y}(1,1) - p_{X,Y}(0,0)}{2} = \frac{1}{3}.$$

(c) Anzitutto, $Var(X) = Var(Y) = \frac{9}{15}\frac{6}{15} = \frac{54}{225}$. Inoltre

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{15} - \frac{81}{225} = -\frac{21}{225}.$$

Infine

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = -\frac{21}{54}.$$