Prova Scritta di **Istituzioni di Calcolo delle Probabilità** 8 Settembre 2016 Prof. PAOLO DAI PRA	Cognome: ____________ Nome: ____________ Matricola: ____________

Esercizio 1. Una variabile aleatoria continua X ha densità

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione generatrice dei momenti $m_X(t)$.

(b) Calcolare $E(X)$ in due modi distinti:

- usando la funzione generatrice dei momenti;
- usando la densità nel modo usuale.

Soluzione 1. (a)

$$\begin{aligned} m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx &= \int_0^1 x^2 e^{tx}dx + \frac{1}{3}\int_1^3 e^{tx}dx \\ &= x^2 \frac{1}{t} e^{tx}\Big|_0^1 - \frac{2}{t}\int_0^1 x e^{tx}dx + \frac{1}{3t}e^{tx}\Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{t}e^t - \frac{2}{t^2}xe^{tx}\Big|_0^1 + \frac{2}{t^2}\int_0^1 e^{tx}dx + \frac{1}{3t}\left[e^{3t} - e^t\right] \\ &= \frac{1}{t}e^t - \frac{2}{t^2}e^t + \frac{2}{t^3}\left[e^t - 1\right] + \frac{1}{3t}\left[e^{3t} - e^t\right] \end{aligned}$$

Chiaramente questo calcolo è lecito per $t \neq 0$, ma sappiamo che $m_X(0) = 1$.

(b) Sappiamo che $E(X) = m'_X(0)$. Per farlo si possono usare due metodi. Un primo metodi consiste nel calcolare, con paziente calcolo, $m'_X(t)$ per $t \neq 0$, e quindi far tendere t a zero. Per calcolare il limite conviene espandere e^t e e^{3t} in serie di Taylor. Questa espansione suggerisce però una via più veloce. Usando l'espansione $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$, e analogamente per e^{3t}, sostituendo nell'espressione ottenuta per $m_X(t)$ si trova

$$m_X(t) = 1 + \frac{19}{12}t + \text{termini di ordine } t^2 \text{ e superiore}$$

da cui subito $m'_X(0) = \frac{19}{12}$.
Usando invece il metodo usuale:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{3}\int_1^3 x dx = \frac{19}{12}.$$

Esercizio 2. In un certo gioco si ottiene un guadagno aleatorio. Le capacità del giocatore migliorano continuando a giocare: all'n-esima ripetizione del gioco, con $n \geq 1$ il guadagno è una variabile aleatoria

$$X_n \sim Po\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

espresso in Euro. Denotiamo con $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ il guadagno totale dopo n ripetizioni.

(a) Qual è la probabilità che il guadagno totale dopo tre ripetizioni superi i tre Euro?

(b) Supponiamo di continuare a giocare fino a quando il guadagno totale non supera i 5 Euro. Qual è la probabilità che dopo 10 ripetizioni si debba ancora continuare a giocare?

Soluzione 2. (a) Y_3 è la somma di tre Poisson indipendenti di parametri, rispettivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{8}$, e quindi Y_3 è di Poisson di parametro $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=\frac{17}{8}$. Quindi

$$\begin{aligned}P(Y_3>3) &= 1-P(Y_3=0)-P(Y_3=1)-P(Y_3=2)-P(Y_3=3)\\ &= 1-e^{-17/8}\left((1+17/8+\frac{(17/8)^2}{2}+\frac{(17/8)^3}{6}\right)\simeq 0.166.\end{aligned}$$

(b) Si deve continuare a giocare se e solo se $Y_5\leq 5$, il che, essendo Y_5 Poisson di parametro

$$\lambda=\sum_{n=1}^{10}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\simeq 9$$

avviene con probabilità

$$e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{5}\frac{\lambda^k}{k!}\simeq 0.1157.$$

Esercizio 3. Ugo e Mirella si danno appuntamento per le 15:00 in aula studio. Entrambi arriveranno in un orario uniformemente distribuito fra le 15:00 e le 16:00, e i loro orari di arrivo sono indipendenti.

(a) Qual è la probabilità che Ugo e Mirella arrivino esattamente nello stesso istante?

(b) Qual è la probabilità che Ugo arrivi fra le 15:00 e le 15:30, e Mirella fra le 15:40 e le 16:00?

(c) Qual è la probabilità che Ugo arrivi almeno 20 minuti prima di Mirella?

(d) Sia T il tempo che il primo arrivato deve attendere l'arrivo del secondo. Calcolare $E(T)$.

Soluzione 3. Siano T_U e T_M gli orari di arrivo, espressi in ore, di Ugo e Mirella. Per comodità definiamo $X=T_U-15$, e $Y=T_M-15$. Risulta quindi che $X,Y\sim U(0,1)$, e sono indipendenti.

(a) $X-Y$ è una variabile continua, quindi $P(X=Y)=P(X-Y=0)=0$.

(b) La probabilità da calcolare è

$$P(X<1/2,Y>2/3)=P(X<1/2)P(Y>2/3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

(c) Per questa e la prossima domanda, è conveniente calcolare la densità di $W=Y-X$. Poiché possiamo scrivere $Y-X=Y+(-X)$, e $-X\sim U(-1,0)$, abbiamo

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\mathbf{1}_{[-1,0]}(w-y).$$

Se $w\in[0,1]$, $\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\mathbf{1}_{[-1,0]}(w-y)==\mathbf{1}_{[w,1]}(y)$, per cui

$$f_W(w)=1-w.$$

Usando un analogo argomento per $w\in[-1,0]$, e notando che $Y-X$ può assumere solo valori fra -1 e 1, si trova

$$f_W(w)=(1-|w|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(w).$$

Dobbiamo calcolare

$$P(W>1/3)=\int_{1/3}^{1}(1-|w|)dw=\frac{2}{3}-\int_{1/3}^{1}wdw=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}.$$

(d) Notare che $T=|W|$. Pertanto

$$E(T)=E(|W|)=\int_{-1}^{1}|w|(1-|w|)dw=2\int_{0}^{1}w(1-w)dw=\frac{1}{3}.$$

Esercizio 4. Ad un esame partecipano 10 studenti. Fra questi, tre hanno studiato piuttosto bene: hanno probabilità 0.9 di rispondere correttamente ad ognuna delle domande poste dal docente. Gli altri studenti, meno preparati, hanno probabilità 0.5 di rispondere esattamente. Assumiamo l'indipendenza sia della correttezza delle risposte di studenti diversi, sia della correttezza delle risposte dello stesso studente a domande diverse.

(a) Il docente sceglie uno studente a caso. Qual è la probabilità che risponda esattamente alla prima domanda?

(b) Sappiamo che lo studente scelto a caso ha risposto esattamente alla prima domanda. Qual è la probabilità che risponda esattamente anche alla seconda?

(c) Di nuovo sappiamo che lo studente scelto a caso ha risposto esattamente alla prima domanda. Il docente ne sceglie un altro fra i 9 restanti. Qual è la probabilità che sia tra quelli ben preparati?

Soluzione 4. (a) Sia $A =$ "lo studente risponde esattamente" e $B =$ "lo studente è tra quelli ben preparati". Sappiamo che

$$P(A|B) = 0.9, \quad P(A|B^c) = 0.5.$$

Inoltre

$$P(B) = 0.3.$$

Allora

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0.9 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.7 = 0.62.$$

(b) Sia $C =$ "lo studente risponde esattamente alla seconda domanda". Dobbiamo calcolare $P(C|A) = \frac{P(A\cap C)}{P(A)}$. Ma

$$P(A\cap C) = P(A\cap C|B)P(B) + P(A\cap C|B^c)P(B^c) = 0.9^2 \cdot 0.3 + 0.5^2 \cdot 0.7 = 0.418.$$

Quindi

$$P(C|A) = \frac{0.418}{0.62} =\simeq 0.674.$$

(c) Sia $D =$ "il secondo studente scelto è fra quelli ben preparati". Si ha: $P(D|A) = \frac{P(D\cap A)}{P(A)}$. Si noti che $P(D\cap A|B)$ è la probabilità che, avendo scelto uno studente ben preparato, si verifichino i seguenti due eventi indipendenti: lo studente risponde esattamente (prob. 0.9) e il secondo studente scelto è ben preparato (prob. 2/9). Quindi

$$P(D\cap A|B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{5}.$$

Analogamente

$$P(D\cap A|B^c) = 0.5 \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{18}.$$

Quindi

$$P(D\cap A) = P(D\cap A|B)P(B) + P(D\cap A|B^c)P(B^c) \simeq 0.177,$$

da cui

$$P(D|A) = \frac{P(D\cap A)}{P(A)} \simeq 0.285.$$