Prova Scritta di **Istituzioni di Calcolo delle Probabilità** 23 Gennaio 2017 Prof. PAOLO DAI PRA	Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____

Esercizio 1. Siano X e Y variabili aleatorie congiuntamente continue con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{se } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante opportuna.

(a) Si determini la costante c e le densità marginali f_X e f_Y.

(b) Calcolare $E\left(\frac{\sin(X)}{X}|Y\right)$.

Soluzione 1. (a) Dev'essere

$$1 = c\int_0^1 \left[\int_0^x xydy\right] dx = c\frac{1}{2}\int_0^1 x^3 dx = \frac{c}{8},$$

per cui $c = 8$. Inoltre, per $x \in [0,1]$,

$$f_X(x) = 8\int_0^x xydy = 4x^3,$$

e $f_X(x) = 0$ se $x \notin [0,1]$. Analogamente, per $y \in [0,1]$

$$f_Y(y) = 8\int_y^1 xydy = 4y(1-y^2),$$

e $f_Y(y) = 0$ se $y \notin [0,1]$.

(b) Anzitutto

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{8xy}{4y(1-y^2)} = \frac{2x}{1-y^2} & \text{se } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Dunque, per $y \in (0,1)$

$$E\left(\frac{\sin(X)}{X}|Y=y\right) = \int \frac{\sin(x)}{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_y^1 \frac{\sin(x)}{x}\frac{2x}{1-y^2}dx = \frac{2}{1-y^2}\int_y^1 \sin(x)dx$$
$$= \frac{2(\cos(y)-\cos(1))}{1-y^2}.$$

Dunque

$$E\left(\frac{\sin(X)}{X}|Y\right) = \frac{2(\cos(Y)-\cos(1))}{1-Y^2}.$$

Esercizio 2. Un gruppo di 10 persone è costituito da 5 maschi e 5 femmine. Cominciamo con lo scegliere due individui a caso del gruppo. Successivamente ognuno dei due individui scelti sceglie a sua volta, indipendentemente l'uno dall'altro, un partner, con la seguente regola: un maschio ha probabilità 0.8 di scegliere una femmina, mentre una femmina ha probabilità 0.3 di scegliere una femmina. Questo procedimento "a due passi" alla fine seleziona 4 persone nel gruppo di 10.

(a) Qual è la probabilità che le due persone scelte al primo passo siano un maschio e una femmina?

(b) Se le due persone scelte al primo passo sono un maschio e una femmina, qual è la probabilità che alla fine risultino selezionati 3 maschi?

(c) Se alla fine risultano selezionati 3 maschi, qual è la probabilità che le due persone scelte al primo passo siano un maschio e una femmina?

Denotiamo ora con X_1 il numero di maschi scelti al primo passo, e con X_2 il numero di maschi selezionati complessivamente.

(d) Si determini la densità p_{X_1} di X_1 e la densità condizionata $p_{X_2|X_1}$.

(e) Calcolare la media condizionata $E(X_1|X_2 = 2)$.

Soluzione 2. Usiamo, da subito, le v.a. X_1 e X_2.

(a)
$$P(X_1 = 1) = \frac{25}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9}.$$

(b)
$$P(X_2 = 3|X_1 = 1) = 0.2 \cdot 0.7 = 0.14.$$

(c) Notare che
$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 2) = \frac{10}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9},$$
e
$$P(X_2 = 3|X_1 = 0) = 0,\ P(X_2 = 3|X_1 = 2) = 2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.32.$$
Pertanto
$$\begin{aligned} P(X_2 = 3) &= P(X_2 = 3|X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_2 = 3|X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 3|X_1 = 2)P(X_1 = 2) \\ &= 0.14 \cdot \frac{5}{9} + 0.32 \cdot \frac{2}{9} \simeq 0.149 \end{aligned}$$
Quindi, per la Formula di Bayes
$$P(X_1 = 1|X_2 = 3) = \frac{P(X_2 = 3|X_1 = 1)P(X_1 = 1)}{P(X_2 = 3)} = \frac{0.14 \cdot \frac{5}{9}}{0.149} \simeq 0.522.$$

(d) p_{X_1} è già stata calcolata: $P(X_1 = 1) = \frac{5}{9}$, $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 2) = \frac{2}{9}$. Inoltre, parzialmente con calcoli già fatti:
$$P(X_2 = 4|X_1 = 0) = 0,\ P(X_2 = 4|X_1 = 1) = 0,\ P(X_2 = 4|X_1 = 2) = 0.04$$
$$P(X_2 = 3|X_1 = 0) = 0,\ P(X_2 = 3|X_1 = 1) = 0.14,\ P(X_2 = 3|X_1 = 2) = 0.32$$
$$P(X_2 = 2|X_1 = 0) = 0.49,\ P(X_2 = 2|X_1 = 1) = 0.8{\cdot}0.7{+}0.2{\cdot}0.3 = 0.62,\ P(X_2 = 2|X_1 = 2) = 0.64$$
$$P(X_2 = 1|X_1 = 0) = 2{\cdot}0.3{\cdot}0.7 = 0.42,\ P(X_2 = 1|X_1 = 1) = 0.8{\cdot}0.3 = 0.24,\ P(X_2 = 1|X_1 = 2) = 0$$
$$P(X_2 = 0|X_1 = 0) = 0.09,\ P(X_2 = 0|X_1 = 1) = 0,\ P(X_2 = 0|X_1 = 2) = 0.$$

(e) Si osservi che:
$$E(X_1|X_2 = 2) = P(X_1 = 1|X_2 = 2) + 2P(X_1 = 2|X_2 = 2).$$
Per la Formula di Bayes
$$\begin{aligned} P(X_1 = 1|X_2 = 2) &= \frac{P(X_2 = 2|X_1 = 1)P(X_1 = 1)}{P(X_2 = 2|X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 2|X_1 = 2)P(X_1 = 2)} \\ &= \frac{0.14 \cdot \frac{5}{9}}{0.14 \cdot \frac{5}{9} + 0.64 \cdot \frac{2}{9}} \simeq 0.3535. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Nel biathlon (sci di fondo e tiro al bersaglio) vi sono due tipi di sessioni di tiro: a terra e in piedi. Dorothea ha una percentuale di successo dell'85% a terra e del 70% in piedi. Federica, invece, ha una percentuale dell'80% a terra e del 75% in piedi. Si assuma che gli esiti di tiri distinti siano indipendenti. Dorothea e Federica eseguono entrambe, in un allenamento, 100 tiri e terra e 100 in piedi. Si calcoli approssimativamente:

(a) la probabilità che Dorothea ottenga, a terra, oltre 80 centri;

(b) la probabilità che Federica ottenga, fra tiri a terra e in piedi, meno di 150 centri;

(c) la probabilità che Federica superi Dorothea di oltre 10 centri.

Soluzione 3. Possiamo, in tutti i casi, usare l'approssimazione normale. Denotiamo con $X_{T,D}$ i centri ottenuti a terra da Dorothea.

(a)

$$P(X_{T,D} > 80) = P(X_{T,D} > 80.5) = P(B(100, 0.85) > 80.5) \simeq P\left(N(0,1) > \frac{80.5 - 85}{10\sqrt{0.85 \cdot 0,15}}\right)$$
$$\simeq 1 - \Phi(-1.26) = \Phi(1.26) \simeq 0.896.$$

(b) Usando notazioni simili alla precedente, possiamo approssimare $X_{T,F}$ con una normale $N(80, 80{\cdot}0.2)$ e $X_{P,F}$ con una $N(75, 75 \cdot 0.25)$. Quindi il numero totale di centri di Federica $X_F = X_{P,F} + X_{T,F}$ ha distribuzione approssimativamente $N(155, 34.75)$. Quindi

$$P(X_F < 150) = P(X_F \leq 149.5) = P\left(N(0,1) \leq \frac{-5}{\sqrt{34.75}}\right) \simeq 0.198.$$

(c) Come al punto (b), possiamo approssimare X_D con una $N(155, 33.75)$, e quindi $X_F - X_D$ con una $N(0, 68.5)$. Quindi

$$P(X_F - X_D > 10) = P(X_F - X_D > 10.5) \simeq P\left(N(0,1) > \frac{10.5}{\sqrt{68.5}}\right) \simeq 0.102$$

Esercizio 4. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, con distribuzione esponenziale di media 1.

(a) Si calcoli $P(X < 1)$ e $P(X < 2|X > 1)$.

(b) Si calcoli $P(X < 1|X \notin [1, 2])$.

(c) Si definisca la variabile aleatoria Z come segue:

$$Z = \begin{cases} X & \text{se } X < 1 \\ Y & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per ogni $z > 0$ si calcoli $P(Z > z)$.

Soluzione 4. (a) Entrambe le probabilità valgono $1 - e^{-1}$.

(b)

$$P(X < 1|X \notin [1,2]) = \frac{P(X < 1, X \notin [1,2])}{P(X \notin [1,2])} = \frac{P(X < 1)}{P(X \notin [1,2])} = \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-1} + e^{-2}}.$$

(c) Si ha, per definizione di Z,

$$P(Z > z) = P(Z > z, X < 1) + P(Z > z, X \geq 1) = P(X > z, X < 1) + P(Y > z, X \geq 1)$$
$$= P(z < X < 1) + P(Y > z)P(X \geq 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 0 \\ e^{-z} - e^{-1} + e^{-z}e^{-1} & \text{se } 0 \leq z < 1 \\ e^{-z}e^{-1} & \text{se } z \geq 1 \end{cases}$$