Prova Scritta di **Istituzioni di Calcolo delle Probabilità** 13 Febbraio 2017 Prof. PAOLO DAI PRA	Cognome: __________ Nome: __________ Matricola: __________

Esercizio 1. Un'urna contiene 50 palline, 30 bianche, 15 rosse, 5 verdi. Si estraggono, successivamente, tre palline, senza reimmissione.

(a) Calcolare la probabilità che le tre palline estratte siano dello stesso colore.

(b) Calcolare la probabilità che almeno due delle palline estratte siano rosse.

(c) Sapendo che la terza pallina estratta è rossa, qual è la probabilità che le tre palline estratte siano dello stesso colore?

Soluzione 1. (a) Consideriamo gli eventi $B =$ "le tre palline sono bianche", $R =$ "le tre palline sono rosse", $V =$ "le tre palline sono verdi". La probabilità richiesta è

$$P(B) + P(R) + P(V) = \frac{\binom{30}{3} + \binom{15}{3} + \binom{5}{3}}{\binom{50}{3}}.$$

(b) La probabilità che le palline rosse siano esattamente due è

$$\frac{\binom{15}{2} \cdot 35}{\binom{50}{3}},$$

alla quale bisogna aggiungere la probabilità che siano rosso tutte e tre. Quindi la probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{15}{2} \cdot 35 + \binom{15}{3}}{\binom{50}{3}}.$$

(c) Sia $R_3 =$ "la terza pallina estratta è rossa. Abbiamo che $P(R_3) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$, e

$$P(R|R_3) = \frac{P(R \cap R_3)}{P(R_3)} = \frac{P(R)}{P(R_3)} = \frac{\frac{\binom{15}{3}}{\binom{50}{3}}}{\frac{3}{10}}.$$

Esercizio 2. I tentativi di connessione all'unità centrale di una rete telematica hanno successo con probabilità 0.95, ognuno indipendentemente dagli altri.

(a) Sia X_1 il numero di tentativi necessari ad effettuare la prima connessione con successo. Qual è la densità discreta di X_1? E il suo valor medio?

(b) Sia X_n il numero di tentativi necessari ad effettuare n connessioni con successo. Qual è la densità discreta di X_n? E il suo valor medio?

(c) Un utente della rete deve effettuare l'upload di un grosso file. Il numero di connessioni necessarie a completare l'upload è una variabile aleatoria $N \sim Po(4)$. Sia inoltre Y il numero di tentativi di connessione necessari ad effettuare l'upload. Si determini la densità condizionata $p_{Y|N}$ e il valor atteso condizionato $E(Y|N)$

(d) Si determini la densità congiunta di Y e N, e il valor atteso di Y.

Soluzione 2. (a) X_1 è una variabile geometrica di parametro 0.95, quindi

$$P(X_1 = n) = 0.95(0.05)^{n-1}$$

per $n \geq 1$, e $E(X_1) = \frac{1}{0.95}$.

(b) X_n è una variabile ipergeometrica, quindi

$$P(X_n = k) = 0.95 \cdot \binom{k-1}{n-1}(0.95)^{k-1}(0.05)^{n-k}$$

per $k \geq n$, e $E(X_n) = \frac{n}{0.95}$.

(c) Notare che, se $N = n$, Y è il numero di tentativi necessari a effettuare n connessioni, quindi

$$P(Y = k|N = n) = P(X_n = k),$$

per cui $E(Y|N) = \frac{N}{0.95}$.

(d)

$$P(Y = k, N = n) = P(Y = k|N = n)P(N = n) = 0.95 \cdot \binom{k-1}{n-1}(0.95)^{k-1}(0.05)^{n-k}e^{-4}\frac{4^n}{n!}.$$

Inoltre

$$E(Y) = E[E(Y|N)] = E\left[\frac{N}{0.95}\right] = \frac{4}{0.95}.$$

Esercizio 3. Una zona è completamente ricoperta di sassi di forma approssimativamente sferica. I loro diametri hanno distribuzione normale, con media 3 cm e deviazione standard 0.5 cm. Questi sassi vengono raccolti per vari usi nell'edilizia. Per evitare di raccogliere sassi troppo piccoli vengono usati dei filtri che trattengono solo i sassi il cui diametro è di almeno 3.2 cm.

(a) Qual è la percentuale di sassi che vengono raccolti da questi filtri (cioè hanno diametro di almeno 3.2 cm)?

(b) *Fra i sassi raccolti*, qual è la percentuale di quelli con diametro maggiore di 3.5 cm?

Soluzione 3. (a) Sia $X \sim N(3, 0.25)$, e $Z = 2(X - 3) \sim N(0, 1)$.

$$P(X \geq 3.2) = P(Z \geq 0.4) = 1 - \Phi(0.4) \simeq 0.345.$$

Quindi vengono raccolti circa il 34.5% dei sassi.

(b) richiesto di calcolare

$$P(X > 3.5|X \geq 3.2) = \frac{P(X > 3.5)}{P(X \geq 3.2)} = \frac{P(Z > 1)}{0.345} = \frac{1 - \Phi(1)}{0.345} \simeq 0.46,$$

cioè il 46% dei sassi raccolti ha diametro maggiore di 3.5 cm.

Esercizio 4. Per $n \geq 1$, siano $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n-1,n}, X_{n,n} \sim U(0, n)$ variabili aleatorie indipendenti. Poniamo:

$$Y_n := \max(X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n-1,n}, X_{n,n})$$

(a) Si calcoli la funzione di ripartizione F_{Y_n} di Y_n.

(b) Si ponga $W_n := n - Y_n$. Calcolare, per ogni $x \in \mathbb{R}$, il limite

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} F_{W_n}(x).$$

Quale tipo di variabile aleatoria ha F come funzione di ripartizione?

Soluzione 4. Attenzione, c'era un errore nel testo min andava sostituito con max. L'esercizio con min era un po' più banale ($F(x) = 0$ per ogni x, che non è la funzione di ripartizione di alcuna variabile aleatoria), ma se svolto correttamente verrà pienamente valutato.

(a) Anzitutto:

$$F_{X_{i,n}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} & \text{se } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > n. \end{cases}$$

Infine

$$F_{Y_n}(x) = \left[F_{X_{i,n}}(x)\right]^n = \begin{cases} \left(\frac{x}{n}\right)^n & \text{se } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > n. \end{cases}$$

(b)

$$F_{W_n}(x) = P(W_n \leq x) = P(Y_n \geq n - x) = 1 - \left(\frac{n-x}{n}\right)^n \to 1 - e^{-x} = F(x),$$

per $x \geq 0$, e F è la funzione di ripartizione di una $Exp(1)$.