ANALISI DELLE SERIE TEMPORALI - SERIE STORICHE ECONOMICHE

Padova, 9 settembre 2015

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

1 [4]	2 [4+3]	3 [2+2+2]	4 [4+1]	5 [2+2]	6 [4]	Totale

Domanda 1 Sia $Y_t = A+X_t$, dove A è una variabile casuale con $E[A] = \mu_A$, $Var(A) = \sigma^2_A$ indipendente dal processo stocastico stazionario X_t, per il quale si ha $E[X_t] = \mu_X$ e $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k$. Si calcolino funzione media e autocovarianza del processo Y_t e si dica se è stazionario.

Soluzione:

- $E[Y_t] = E[A + X_t] = E[A] + E[X_t] = \mu_A + \mu_X$ per ogni t.
- $Var(Y_t) = Var(A+X_t) = Var(A)+Var(X_t)+2Cov(A, X_t) = \sigma^2_A + \sigma^2_X$ per ogni t, in quanto A e X_t sono indipendenti.
- $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(A+X_t, A+X_{t-k}) = Cov(A, A)+Cov(A, X_{t-k})+Cov(X_t, A)+Cov(X_t, X_{t-k}) =$ (sempre per l'indipendenza fra A e X_t) $= Var(A)+Cov(X_t, X_{t-k}) = \sigma^2_A+\gamma_k$ che non dipende da t ma solo dal ritardo k.

Pertanto, il processo Y_t è stazionario.

Domanda 2 Si considerino i due processi MA(2): $X_t = -\frac{1}{6}\epsilon_{t-1} - \frac{1}{6}\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$ e $Y_t = \epsilon_{t-1} - 6\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$, con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

1. Si dimostri che X_t e Y_t hanno la stessa funzione di autocorrelazione.
2. Si dica se sono invertibili.

Soluzione:

1. Per quanto riguarda il processo X_t abbiamo:

$$\gamma_0^X = Var(X_t) = \frac{1}{36}\sigma^2 + \frac{1}{36}\sigma^2 + \sigma^2 = \frac{19}{18}\sigma^2$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1^X &= Cov(X_t, X_{t-1}) = E\left[\left(-\frac{1}{6}\epsilon_{t-1} - \frac{1}{6}\epsilon_{t-2} + \epsilon_t\right)\left(-\frac{1}{6}\epsilon_{t-2} - \frac{1}{6}\epsilon_{t-3} + \epsilon_{t-1}\right)\right] \\
&= E\left[-\frac{1}{6}\epsilon_{t-1}^2 + \frac{1}{36}\epsilon_{t-2}^2\right] \\
&= -\frac{1}{6}\sigma^2 + \frac{1}{36}\sigma^2 = -\frac{5}{36}\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2^X &= Cov(X_t, X_{t-2}) = E\left[\left(-\frac{1}{6}\epsilon_{t-1} - \frac{1}{6}\epsilon_{t-2} + \epsilon_t\right)\left(-\frac{1}{6}\epsilon_{t-3} - \frac{1}{6}\epsilon_{t-4} + \epsilon_{t-2}\right)\right] \\
&= E\left[-\frac{1}{6}\epsilon_{t-2}^2\right] = -\frac{1}{6}\sigma^2
\end{aligned}$$

E, ovviamente, $\gamma_k^X = 0$ per $k > 2$. Pertanto, la funzione di autocorrelazione di X_t è:

$$\rho_k^X = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -\frac{5}{38} & k = 1 \\ -\frac{3}{19} & k = 2 \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

Per quanto riguarda, invece, il processo Y_t abbiamo:

$$\gamma_0^Y = Var(Y_t) = \sigma^2 + 36\sigma^2 + \sigma^2 = 38\sigma^2$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1^Y &= Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E\left[(\epsilon_{t-1} - 6\epsilon_{t-2} + \epsilon_t)(\epsilon_{t-2} - 6\epsilon_{t-3} + \epsilon_{t-1})\right] \\
&= E\left[\epsilon_{t-1}^2 - 6\epsilon_{t-2}^2\right] = -5\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2^Y &= Cov(Y_t, Y_{t-2}) = E\left[(\epsilon_{t-1} - 6\epsilon_{t-2} + \epsilon_t)(\epsilon_{t-3} - 6\epsilon_{t-4} + \epsilon_{t-2})\right] \\
&= E\left[-6\epsilon_{t-2}^2\right] = -6\sigma^2
\end{aligned}$$

E, ovviamente, $\gamma_k^Y = 0$ per $k > 2$. Pertanto, la funzione di autocorrelazione di X_t è:

$$\rho_k^Y = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -\frac{5}{38} & k = 1 \\ -\frac{3}{19} & k = 2 \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

Quindi i due processi possiedono la stessa funzione di autocorrelazione.

2. Per verificare se sono invertibili devo calcolare le radici delle equazioni caratteristiche associate ai processi e verificare se sono in modulo maggiori di 1.

   - Per quanto riguarda il processo X_t si deve verificare se le due radici dell'equazione caratteristica
   $$1 - \frac{1}{6}B - \frac{1}{6}B^2 = 0$$
   sono in modulo maggiori di 1. Essendo $\Delta = \frac{25}{36}$ le due radici sono $B_1 = 2$ e $B_2 = -3$, entrambe in modulo maggiori di uno e quindi il processo X_t è invertibile.
   - Analogamente, per quanto riguarda il processo Y_t si deve verificare se le due radici dell'equazione caratteristica
   $$1 + B - 6B^2 = 0$$
   sono in modulo maggiori di 1. In questo caso abbiamo $\Delta = 25$, quindi le due soluzioni sono $B_1 = 1/2$ e $B_2 = -1/3$, che sono esattamente il reciproco di quelle del processo X_t. Essendo, entrambe, in modulo inferiori ad uno, il processo Y_t NON è invertibile.

   Quindi, solo il processo X_t è invertibile.

Domanda 3 Per ognuno dei seguenti processi:

(a) $Y_t = Y_{t-1} - 0.25Y_{t-2} + \epsilon_t - 0.1\epsilon_{t-1}$

(b) $Y_t = 2Y_{t-1} - Y_{t-2} + \epsilon_t$

(c) $Y_t = 0.8Y_{t-1} - 0.15Y_{t-2} + \epsilon_t - 0.3\epsilon_{t-1} - 0.1\epsilon_{t-2}$

si chiede di:

1. riscriverlo utilizzando l'operatore ritardo B;
2. dire che tipo di modello ARIMA(p, d, q) lo descrive.

Soluzione:

(1.a) $(1 - B + 0.25B^2)Y_t = (1 - 0.1B)\epsilon_t$

(1.b) $(1 - 2B + B^2)Y_t = \epsilon_t$ quindi $(1 - B)^2Y_t = \epsilon_t$

(1.c) $(1 - 0.8B + 0.15B^2)Y_t = (1 - 0.3B - 0.1B^2)\epsilon_t$

(2.a) Il processo sembra un ARIMA$(2, 0, 1)$, tuttavia per esserne certo (per verificare che non ci siano radici unitarie e/o che non si possa procedere ad una semplificazione) trovo le radici dell'equazione caratteristica

$$1 - B + 0.25B^2 = 0.$$

Essendo $1-B+0.25B^2 = (1-0.5B)^2$ ci sono due radici reali coincidenti e pari a $B_{1,2} = 2$ quindi in modulo maggiori di uno. Resta dunque confermato che il processo è un ARIMA$(2, 0, 1)$.

(2.b) Il processo possiede due radici unitarie, quindi è un ARIMA$(0, 2, 0)$.

(2.c) Il processo sembra un ARIMA$(2, 0, 2)$, tuttavia per esserne certo trovo le radici delle equazioni caratteristiche delle parti AR e MA. Per la parte AR abbiamo:

$$1 - 0.8B + 0.15B^2 = 0$$

che avendo $\Delta = 0.04$ porta alle due soluzioni $B_1 = 2$ e $B_2 = 10/3$. Per la parte MA abbiamo, invece:

$$1 - 0.3B - 0.1B^2 = 0$$

che porta a $\Delta = 0.49$ e quindi a $B_1 = 2$ e $B_2 = -5$. Si nota che abbiamo una radice in comune, e che quindi si può scrivere:

$$1 - 0.8B + 0.15B^2 = (1 - 0.5B)(1 - 0.3B)$$

e

$$1 - 0.3B - 0.1B^2 = (1 - 0.5B)(1 + 0.2B),$$

il che porta a semplificare il processo che risulta dunque essere un ARMA$(1, 1)$ (stazionario e invertibile).

Domanda 4 Si considerino le due serie V_t e Z_t

$$V_t = \sum_{i=-2}^{2} \vartheta_i Y_{t+i} = M_1 Y_t \qquad Z_t = \sum_{i=-2}^{2} \psi_i Y_{t+i} = M_2 Y_t$$

dove $\{Y_t,\ t = 1, 2, \cdots\}$ è una sequenza di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite di media nulla e varianza σ^2 ed M_1 e M_2 sono medie mobili con coefficienti pari a

$$\vartheta_2 = \vartheta_{-2} = -\frac{21}{286}, \quad \vartheta_1 = \vartheta_{-1} = \frac{84}{286} \quad \text{e} \quad \vartheta_0 = \frac{160}{286};$$

$$\psi_2 = \psi_{-2} = -\frac{3}{35}, \quad \psi_1 = \psi_{-1} = \frac{12}{35} \quad \text{e} \quad \psi_0 = \frac{17}{35}.$$

1. Per quale delle due serie V_t e Z_t l'autocorrelazione del primo ordine ρ_1 è più elevata?
2. Quale delle due medie mobili dovrebbe indurre una dinamica meno irregolare nelle serie risultanti?

Soluzione: Esercizio 3.8 (punti 1 e 3) dell'eserciziario.

1. Per calcolare ρ_1 è necessario derivare la media e la varianza delle serie V_t e Z_t. Per la serie V_t si ha

$$\begin{aligned} E(V_t) &= E\left(\sum_{i=-2}^{2} \vartheta_i Y_{t+i}\right) = \sum_{i=-2}^{2} \vartheta_i E(Y_{t+i}) = 0 \\ Var(V_t) &= \left[E\left(\sum_{i=-2}^{2} \vartheta_i Y_{t+i}\right)^2\right] = \sigma^2 \sum_{i=-2}^{2} \vartheta_i^2 = 0,4963\sigma^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E\left(\sum_{i=-2}^{2} \psi_i Y_{t+i}\right) = \sum_{i=-2}^{2} \psi_i E(Y_{t+i}) = 0 \\ Var(Z_t) &= \left[E\left(\sum_{i=-2}^{2} \psi_i Y_{t+i}\right)^2\right] = \sigma^2 \sum_{i=-2}^{2} \psi_i^2 = 0,4857\sigma^2. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora ρ_1 per V_t. Essa è pari a

$$\rho_1^V = \frac{E(V_t V_{t-1})}{Var(V_t)}$$

dove

$$\begin{aligned} E(V_t V_{t-1}) = \; & E\left[(\vartheta_{-2} Y_{t-2} + \vartheta_{-1} Y_{t-1} + \vartheta_0 Y_t + \vartheta_1 Y_{t+1} + \vartheta_2 Y_{t+2}) \times \right. \\ & \left. (\vartheta_{-2} Y_{t-3} + \vartheta_{-1} Y_{t-2} + \vartheta_0 Y_{t-1} + \vartheta_1 Y_t + \vartheta_2 Y_{t+1})\right]. \end{aligned}$$

Poiché $E(Y_t Y_{t+s}) = 0$ per $s \neq 0$, il calcolo precedente si semplifica in

$$\begin{aligned} E(V_t V_{t-1}) &= [\vartheta_{-2}\vartheta_{-1}E(Y_{t-2}^2) + \vartheta_{-1}\vartheta_0 E(Y_{t-1}^2) + \vartheta_0\vartheta_1 E(Y_t^2) + \\ & \quad \vartheta_1\vartheta_2 E(Y_{t+1}^2)]. \end{aligned}$$

Sostituendo il valore dei coefficienti all'espressione precedente si ottiene

$$\begin{aligned} E(V_t V_{t-1}) &= \sigma^2 \frac{1}{286^2}[-21 \cdot 84 + 84 \cdot 160 + 160 \cdot 84 \\ & \quad -84 \cdot 21] = 0,2855\sigma^2. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\rho_1^V = \frac{0,2855\sigma^2}{0,4963\sigma^2} = 0,5753.$$

Seguendo lo stesso procedimento per la serie Z_t si ottiene

$$\rho_1^Z = \frac{0,2743\sigma^2}{0,4857\sigma^2} = 0,5648.$$

Pertanto, la serie storica che presenta autocorrelazione del primo ordine più elevata è V_t.

2. La media mobile M_2 dovrebbe comportare una dinamica meno irregolare di M_1 in quanto il suo rapporto di riduzione della varianza è minore (0,4857 contro 0,4963).

Domanda 5 Si definiscano

1. il trend deterministico
2. il trend stocastico

e si fornisca un esempio di processo trend-stazionario ed uno di processo differenza-stazionario.

Domanda 6 Discutere brevemente la stima della componente stagionale mediante variabili *dummy*.