ANALISI DELLE SERIE TEMPORALI - SERIE STORICHE ECONOMICHE

Padova, 17 febbraio 2016

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

1 [2+3]	2 [3+4]	3 [4]	4 [6]	5 [4]	6 [4]	Totale

Domanda 1 Sia $Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, un processo AR(1) stazionario e si consideri il processo $W_t = Y_t + c\phi^t$ dove $c \neq 0$ è una costante.

1. Si dica, giustificando la risposta, se W_t è stazionario.
2. Si mostri che W_t può essere scritto in forma di processo AR(1).

Soluzione:

1. $E[Y_t] = 0$, quindi $E[W_t] = E[Y_t + c\phi^t] = E[Y_t] + c\phi^t = c\phi^t$. Poiché il valore atteso di W_t dipende dal tempo, t, il processo non è stazionario.
2. $W_t = Y_t + c\phi^t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t + c\phi^t = \phi(Y_{t-1} + c\phi^{t-1}) + \epsilon_t = \phi W_{t-1} + \epsilon_t$ che ha la forma di un processo AR(1) pur non essendo stazionario.

Domanda 2 Dati i seguenti processi, Y_t, per ognuno di essi si consideri il processo $W_t = Y_t - Y_{t-1}$. Si dica che tipo di processo ARIMA(p,d,q) descrive W_t, quindi se ne calcoli media e varianza.

1. $Y_t = 3 + Y_{t-1} + \epsilon_t - 0.75\epsilon_{t-1}$
2. $Y_t = 10 + 1.25Y_{t-1} - 0.25Y_{t-2} + \epsilon_t - 0.1\epsilon_{t-1}$

dove $\epsilon_t \sim WN(0,1)$.

Soluzione:

1. Y_t è un processo ARIMA(0,1,1) ed è pertanto non stazionario. Si ha:

$$W_t = 3 + Y_{t-1} + \epsilon_t - 0.75\epsilon_{t-1} - Y_{t-1} = 3 + \epsilon_t - 0.75\epsilon_{t-1}$$

che è un processo ARIMA(0,0,1) stazionario ed invertibile. Per questo processo abbiamo:

$$E[W_t] = E[3 + \epsilon_t - 0.75\epsilon_{t-1}] = 3$$

$$Var(W_t) = Var(3 + \epsilon_t - 0.75\epsilon_{t-1}) = Var(\epsilon_t) + 0.75^2 Var(\epsilon_{t-1}) = 25/16 = 1.5625$$

2. Y_t è un processo ARIMA(1,1,1) (le soluzioni dell'equazione caratteristica associata al polinomio AR sono 4 e 1) quindi non stazionario. Si ha:

$$\begin{aligned} W_t &= 10 + 1.25Y_{t-1} - 0.25Y_{t-2} + \epsilon_t - 0.1\epsilon_{t-1} - Y_{t-1} = \\ &= 10 + 0.25Y_{t-1} - 0.25Y_{t-2} + \epsilon_t - 0.1\epsilon_{t-1} = \\ &= 10 + 0.25(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \epsilon_t - 0.1\epsilon_{t-1} = \\ &= 10 + 0.25W_{t-1} + \epsilon_t - 0.1\epsilon_{t-1} \end{aligned}$$

che è un processo ARIMA(1,0,1) stazionario e invertibile. Per questo processo abbiamo:

$$E[W_t] = E[10 + 0.25W_{t-1} + \epsilon_t - 0.1\epsilon_{t-1}] = 10 + 0.25E[W_{t-1}]$$

per cui, essendo il processo stazionario e quindi essendo $E[W_t] = E[W_{t-1}]$, si ha $E[W_t] = 10/(1 - 0.25) = 40/3 = 13.3333$. Per quanto riguarda la varianza, si ha:

$$\begin{aligned} Var(W_t) &= Var(10 + 0.25W_{t-1} + \epsilon_t - 0.1\epsilon_{t-1}) = \\ &= 0.25^2 Var(W_{t-1}) + Var(\epsilon_t) + 0.1^2 Var(\epsilon_{t-1}) - 2 \cdot 0.25 \cdot 0.1 Cov(W_{t-1}, \epsilon_{t-1}) \end{aligned}$$

Ora, tenendo conto che $Var(W_t) = Var(W_{t-1})$ e che $Cov(W_{t-1}, \epsilon_{t-1}) = Var(\epsilon_t) = 1$ si ottiene:

$$Var(W_t) = \frac{1 + 0.1^2 - 2 \cdot 0.25 \cdot 0.1}{1 - 0.25^2} = 1.024$$

Domanda 3 Si supponga che la serie $x = (6, 5, 4, 6, 4)$ sia una realizzazione di un processo stazionario. Si stimino, in modo opportuno, media, μ, varianza, γ_0 e autocorrelazione di ordine 1, ρ_1.

Soluzione Per quanto riguarda la media, uno stimatore corretto e consistente è fornito dalla media campionaria, per cui:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{6+5+4+6+4}{5} = 5$$

Per quanto riguarda la varianza, questa può essere stimata come:

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{(6-5)^2 + \ldots + (4-5)^2}{5} = \frac{4}{5}$$

Infine, una stima distorta, ma consistente di ρ_1 è:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=1}^{4}(x_t - \bar{x})(x_{t-1} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{5}(x_t - \bar{x})^2} = \frac{(6-5)(5-5) + (5-5)(4-5) + \ldots + (6-5)(4-5)}{(6-5^2) + \ldots + (4-5)^2} = \frac{-2}{4} = -0.5$$

Domanda 4 Per una serie storica di 60 osservazioni è stato stimato un modello ARIMA(1,1,2). Esplicitare il previsore a k passi, per $k = 1, 2, 3$.

Soluzione: **Esercizio 7.1 dell'eserciziario.**

Un modello ARIMA(1,1,2) si esplicita nella seguente forma compatta:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\varepsilon_t.$$

Moltiplicando i due polinomi AR otteniamo un polinomio AR generalizzato con radici stazionarie e non stazionarie

$$\begin{aligned}(1 - \phi_1 B)(1 - B) &= 1 - \phi_1 B - B + \phi_1 B^2 \\ &= 1 - (1 + \phi_1)B + \phi_1 B^2.\end{aligned}$$

Pertanto, il modello per Y_t può essere riscritto nella forma esplicita

$$Y_t = (1 + \phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}.$$

Il previsore per il periodo $n + k$ al tempo n è dunque pari a:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{n+k|n} &= (1 + \phi_1)E_n[Y_{n+k-1}] - \phi_1 E_n[Y_{n+k-2}] \\ &\quad + E_n[\varepsilon_{n+k}] - \theta_1 E_n[\varepsilon_{n+k-1}] - \theta_2 E_n[\varepsilon_{n+k-2}].\end{aligned}$$

Pertanto, con $n = 60$ e $k = 1, 2, 3$, abbiamo

$$\begin{aligned}\hat{y}_{61|60} &= (1 + \phi_1)y_{60} - \phi_1 y_{59} - \theta_1 e_{60} - \theta_2 e_{59} \\ \hat{y}_{62|60} &= (1 + \phi_1)\hat{y}_{61|60} - \phi_1 y_{60} - \theta_2 e_{60} \\ \hat{y}_{63|60} &= (1 + \phi_1)\hat{y}_{62|60} - \phi_1 \hat{y}_{61|60},\end{aligned}$$

dove e_{59} e e_{60} sono i disturbi stimati dal modello nei due periodi.

Domanda 5 Discutere il problema della scelta del grado del polinomio per la stima del trend di una serie storica.

Domanda 6 Discutere brevemente l'effetto di Slutsky-Yule.