SERIE STORICHE ECONOMICHE

Padova, 22 giugno 2016

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

1 [6]	2.1 [3]	2.2 [2]	3 [5]	4 [5]	5 [6]	6 [3]	Totale

Domanda 1 Dato il processo $Y_t = a+bt+ct^2+\epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$, si consideri $X_t = (1-B)^2 Y_t$.

1. Si stabilisca a che classe di processi appartiene X_t.
2. Si dica se X_t è un processo stazionario e/o invertibile.

Soluzione:

1. Risulta:

$$\begin{aligned} X_t &= (1-B)^2 Y_t = (1-2B+B^2)Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = \\ &= a+bt+ct^2+\epsilon_t - 2[a+b(t-1)+c(t-1)^2+\epsilon_{t-1}] + a+b(t-2)+c(t-2)^2+\epsilon_{t-2} = \\ &= 2c + \epsilon_t - 2\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} \end{aligned}$$

   Quindi, $X_t \sim MA(2)$ con media pari a $E[X_t] = 2c$.

2. X_t è certamente stazionario (in quanto MA). Per valutare l'invertibilità devo trovare le radici di

$$1 - 2B + B^2 = 0$$

   Si vede facilmente che ciò equivale a:

$$(1-B)^2 = 0$$

   ossia $B_{1,2} = 1$. Essendoci due radici unitarie il processo X_t NON è invertibile.

Domanda 2 Dati i due processi AR(1) debolmente stazionari:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \nu_t$$

con ϵ_t indipendente da ν_t, si consideri il processo $Z_t = Y_t + X_t$ risultante dalla somma dei due.

Dire, giustificando la risposta, che tipo di processo è Z_t e se ne calcoli media e varianza.

Soluzione:

Si ha:

$$\begin{aligned} Z_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t + \phi_1 X_{t-1} + \nu_t = \\ &= \phi_1 (Y_{t-1} + X_{t-1}) + \epsilon_t + \nu_t = \\ &= \phi_1 Z_{t-1} + \mu_t \end{aligned}$$

dove $\mu_t = \epsilon_t + \nu_t$. Essendo:

1. $E[\mu_t] = 0 \qquad \forall t$
2. $Var(\mu_t) = Var(\epsilon_t + \nu_t) = \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\nu^2 \qquad \forall t$
3. $Cov(\mu_t, \mu_{t-h}) = E[\mu_t \mu_{t-h}] = E[(\epsilon_t + \nu_t)(\epsilon_{t-h} + \nu_{t-h})] = 0 \qquad \forall h \neq 0$

allora $\mu_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\nu^2)$ e quindi $Z_t \sim AR(1)$ stazionario, in quando $\mid \phi_1 \mid < 1$. Per questo modello abbiamo:

1. $E[Z_t] = 0 \qquad \forall t$
2. $Var(Z_t) = \phi_1^2 Var(Z_{t-1}) + Var(\mu_t) + 2\phi_1 Cov(Z_{t-1}, \mu_t)$ da cui si ricava

$$Var(Z_t) = \frac{Var(\mu_t)}{1 - \phi_1^2} = \frac{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\nu^2}{1 - \phi_1^2} = Var(X_t) + Var(Y_t).$$

Domanda 3 Dato il processo $Y_t = \phi Y_{t-2} + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$

1. Si dica per quali valori di ϕ il processo è stazionario.
2. Si calcoli la $Var(Y_t)$.

Soluzione:

1. Il processo è stazionario se le radici dell'equazione $(1 - \phi B^2) = 0$ sono in modulo maggiori di uno. Tali radici sono $B_{1,2} = \pm\sqrt{1/\phi}$. Quindi deve essere $\mid \pm\sqrt{1/\phi} \mid > 1$ da cui segue che deve essere $-1 < \phi < 1$.
2. $Var(Y_t) = Var(\phi Y_{t-2} + \epsilon_t) = \phi^2 Var(Y_{t-2}) + Var(\epsilon_t)$
   In ipotesi di stazionarietà $Var(Y_t) = Var(Y_{t-2})$ quindi:
   $Var(Y_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}$.
   (Si noti che per la positività della varianza deve essere $-1 < \phi < 1$)

Domanda 4

Si supponga che $Y_t = a + bt + S_t + X_t$, dove S_t è la componente stagionale deterministica e periodica con periodo pari a s, mentre X_t è un processo SARIMA$(p, 0, q)(P, 1, Q)_s$. Si determini quale modello segue il processo $W_t = (1 - B^s)Y_t$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} W_t &= Y_t - Y_{t-s} \\ &= (a + bt + S_t + X_t) - (a + b(t - s) + S_{t-s} + X_{t-s}) \\ &= bs + S_t - S_{t-s} + X_t - X_{t-s} \\ \text{e tenendo conto che } S_t = S_{t-s} & \\ &= bs + (1 - B^s)X_t \end{aligned}$$

pertanto W_t è un SARIMA$(p, 0, q)(P, 0, D)_s$ con costante pari a bs.

Domanda 5 Dopo aver definito cosa si intende per *media mobile invariante*, fornirne un semplice esempio.

Domanda 6 Dopo aver detto cosa si intende per *processo a radice unitaria*, fornirne un semplice esempio.