SERIE STORICHE

Padova, 12 luglio 2017

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

1 [4+2]	2 [4]	3 [6]	4 [2+3+2]	5 [4]	6 [4]	Totale

Domanda 1 Sia Y_t un processo stazionario a media nulla, con varianza unitaria e funzione di autocovarianza $\gamma_Y(k)$.

Si considerino i processi:

1. $X_t = (1 - 0,5B)Y_t$
2. $W_t = (1 - 2B)Y_t$

1. Si calcolino le funzioni di autocovarianza dei due processi X_t e W_t in funzione della funzione di autocovarianza di Y_t
2. Si dimostri che i due processi X_t e W_t hanno la stessa funzione di autocorrelazione.

Soluzione:

$$E[Y_t] = 0, \qquad Var(Y_t) = 1, \qquad Cov(Y_t, Y_{t\pm k}) = \gamma_Y(k)$$

1. Per quanto riguarda il processo X_t si ha:

$$X_t = (1 - 0,5B)Y_t = Y_t - 0,5Y_{t-1}$$

quindi:

$$E[X_t] = E[Y_t - 0,5Y_{t-1}] = E[Y_t] - 0,5E[Y_{t-1}] = 0$$

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Var(Y_t - 0,5Y_{t-1}) = Var(Y_t) + 0,5^2 Var(Y_{t-1}) - 2 \cdot 0,5Cov(Y_t, Y_{t-1}) \\ &= 1 + 0,25 - \gamma_Y(1) = 1,25 - \gamma_Y(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t-k}) &= Cov(Y_t - 0,5Y_{t-1}, Y_{t-k} - 0,5Y_{t-k-1}) \\ &= Cov(Y_t, Y_{t-k}) - 0,5Cov(Y_t, Y_{t-k-1}) - 0,5Cov(Y_{t-1}, Y_{t-k}) + 0,5^2 Cov(Y_{t-1}, Y_{t-k-1}) \\ &= \gamma_Y(k) - 0,5\gamma_Y(k+1) - 0,5\gamma_Y(k-1) + 0,25\gamma_Y(k) \\ &= 1,25\gamma_Y(k) - 0,5(\gamma_Y(k+1) - 0,5\gamma_Y(k-1)) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda invece il processo W_t si ha:

$$W_t = (1 - 2B)Y_t = Y_t - 2Y_{t-1}$$

quindi:

$$E[W_t] = E[Y_t - 2Y_{t-1}] = E[Y_t] - 2E[Y_{t-1}] = 0$$

$$\begin{aligned} Var(W_t) &= Var(Y_t - 2Y_{t-1}) = Var(Y_t) + 2^2 Var(Y_{t-1}) - 2 \cdot 2Cov(Y_t, Y_{t-1}) \\ &= 1 + 4 - 4\gamma_Y(1) = 5 - 4\gamma_Y(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(W_t, W_{t-k}) &= Cov(Y_t - 2Y_{t-1}, Y_{t-k} - 2Y_{t-k-1}) \\ &= Cov(Y_t, Y_{t-k}) - 2Cov(Y_t, Y_{t-k-1}) - 2Cov(Y_{t-1}, Y_{t-k}) + 2^2 Cov(Y_{t-1}, Y_{t-k-1}) \\ &= \gamma_Y(k) - 2\gamma_Y(k+1) - 2\gamma_Y(k-1) + 4\gamma_Y(k) \\ &= 5\gamma_Y(k) - 2(\gamma_Y(k+1) - 2\gamma_Y(k-1)) \end{aligned}$$

2. Basta osservare che:

$$\gamma_W(k) = 4\gamma_X(k)$$

quindi:

$$\gamma_W(0) = 4\gamma_X(0)$$

da cui il risultato segue. Infatti:

$$\rho_W(k) = \frac{\gamma_W(k)}{\gamma_W(0)} = \frac{4\gamma_X(k)}{4\gamma_X(0)} = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \rho_X(k)$$

Domanda 2 Si verifichi la stazionarietà del processo

$$Y_t = t^{\alpha}(1 - \theta B)\epsilon_t$$

con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $\quad \mid \theta \mid < 1, \quad \alpha > 0.$

Soluzione: (ES. 6.5 Eserciziario)

Calcoliamo anzitutto la media del processo:

$$E(Y_t) = t^{\alpha} E(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}) = 0 \quad \forall\alpha.$$

La varianza è invece pari a

$$Var(Y_t) = t^{2\alpha} E[(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})^2] = t^{2\alpha}\sigma^2(1 + \theta^2).$$

Perché il processo sia (debolmente) stazionario, è necessario che la varianza non dipenda da t. Per $\alpha > 0$ ciò non accade, e dunque il processo è non stazionario.

Domanda 3

Si consideri la Tabella sottostante che riporta:

1. i valori della serie storica trimestrale, y_t, relativa al tasso di disoccupazione in Italia per il periodo 2012:I - 2016:IV,
2. i valori della serie y_t^{**}, ottenuti tramite la media mobile:

$$y_t = \frac{1}{8}(y_{t-2} + 2y_{t-1} + 2y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2}),$$

3. i coefficienti specifici di stagionalità, CS_t.

Anno	**Trim**	y_t	y_t^{**}	CS_t
2012	I	10,8	-	
2012	II	10,5	-	
2012	III	9,8	10,9	-1,1
2012	IV	11,5	11,3	0,2
2013	I	12,7	11,7	1,0
2013	II	12,0	12,0	0,0
2013	III	11,3	12,3	-1,0
2013	IV	12,6	12,4	0,2
2014	I	13,5	12,4	1,1
2014	II	12,1	12,6	-0,5
2014	III	11,7	12,6	-0,9
2014	IV	13,2	12,5	0,7
2015	I	13,0	12,4	0,6
2015	II	12,1	12,1	0
2015	III	10,6	11,8	-1,2
2015	IV	11,9	11,6	0,3
2016	I	12,1	11,6	0,5
2016	II	11,6	11,6	0,0
2016	III	10,8	-	
2016	IV	12,2	-	

Si trovino i valori destagionalizzati della serie per l'anno 2016.

Soluzione:

1. Per prima cosa, dobbiamo trovare i coefficienti grezzi di stagionalità, prendendo la media dei coefficienti specifici relativi allo stesso trimestre di anni diversi, per cui:

$$\hat{S}_I^* = \frac{1 + 1,1 + 0,6 + 0,5}{4} = 0,8 \qquad \hat{S}_{II}^* = \frac{0 - 0,5 + 0 + 0}{4} = -0,125$$

$$\hat{S}_{III}^* = \frac{-1,1 - 1 - 0,9 - 1,2}{4} = -1,05 \qquad \hat{S}_{IV}^* = \frac{0,2 + 0,2 + 0,7 + 0,3}{4} = 0,35$$

2. Essendo

$$\hat{S}_I^* + \hat{S}_{II}^* + \hat{S}_{III}^* + \hat{S}_{IV}^* = -0,025 \neq 0$$

è necessario procedere al calcolo dei coefficienti ideali che si ottengono semplicemente sottraendo ai coefficienti grezzi la loro media ($-0,025/4 = -0,00625$), otteniamo quindi:

$$\hat{S}_I = 0,806 \qquad \hat{S}_{II} = -0,119 \qquad \hat{S}_{III} = -1,044 \qquad \hat{S}_{III} = 0,356.$$

I coefficienti ora sommano a zero e possiedono dunque i requisiti desiderati. Possiamo utilizzarli, quindi, per destagionalizzare la serie. In particolare, i valori destagionalizzati del 2016 sono:

$$y^d_{2016:I} = 12,1 - 0,806 = 11,294 \qquad y^d_{2016:II} = 11,6 + 0,119 = 11,719$$

$$y^d_{2016:III} = 10,8 + 1,044 = 11,844 \qquad y^d_{2016:IV} = 12,2 - 0,356 = 11,44.$$

Domanda 4 Dato un modello SARIMA(0,0,1)$\times$(1,1,0)$_4$, calcolare la previsione con orizzonte temporale $k = 8$ sapendo che:

- il parametro AR stagionale Φ_1 è pari a 0,3;
- l'ultimo valore osservato della serie storica è $y_n = 4$;
- $\hat{y}_{n+4|n} = 2$.

Soluzione: Esercizio n. 7.6 dell'Eserciziario.

Il processo ha la forma compatta

$$(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B^4)Y_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t.$$

Il polinomio AR generalizzato è pari a

$$(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B^4) = 1 - \Phi_1 B^4 - B^4 + \Phi_1 B^8.$$

Sfruttando questa espressione, il processo originario si trasforma in

$$Y_t = (1 + \Phi_1)Y_{t-4} - \Phi_1 Y_{t-8} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

Il previsore di Y_{n+8} è dunque pari a:

$$\hat{Y}_{n+8|n} = (1 + \Phi_1)E_n[Y_{n+4}] - \Phi_1 E_n[Y_n] + E_n[\varepsilon_{n+8}] - \theta_1 E_n[\varepsilon_{n+7}].$$

Pertanto, utilizzando le regole dei valori attesi condizionati, la previsione di Y_{n+8} secondo questo processo è

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+8|n} &= (1 + \Phi_1)\hat{y}_{n+4|n} - \Phi_1 y_n \\ &= 1,3 \cdot 2 - 0,3 \cdot 4 = 2,6 - 1,2 = 1,4. \end{aligned}$$

Domanda 5 Descrivere brevemente il test di Dickey e Fuller.

Domanda 6 Descrivere brevemente le differenze fra approccio classico e approccio moderno per l'analisi delle serie storiche.