SERIE STORICHE

Padova, 15 settembre 2017

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

1 [6]	2 [3+3]	3 [4]	4 [6]	5 [4]	6 [4]	Totale

Domanda 1 Sia $Y_t = A + X_t$, dove A è una variabile casuale con $E[A] = \mu_A$, $Var(A) = \sigma_A^2$ indipendente dal processo stocastico stazionario X_t, per il quale si ha $E[X_t] = \mu_X$ e $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k$. Si calcolino funzione media e autocovarianza del processo Y_t e si dica se è stazionario.

Soluzione:

- $E[Y_t] = E[A + X_t] = E[A] + E[X_t] = \mu_A + \mu_X$ per ogni t.
- $Var(Y_t) = Var(A+X_t) = Var(A)+Var(X_t)+2Cov(A, X_t) = \sigma_A^2 + \sigma_X^2$ per ogni t, in quanto A e X_t sono indipendenti.
- $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(A+X_t, A+X_{t-k}) = Cov(A, A)+Cov(A, X_{t-k})+Cov(X_t, A)+Cov(X_t, X_{t-k}) =$ (sempre per l'indipendenza fra A e X_t) $= Var(A)+Cov(X_t, X_{t-k}) = \sigma_A^2+\gamma_k$ che non dipende da t ma solo dal ritardo k.

Pertanto, il processo Y_t è stazionario.

Domanda 2 Dato il processo $Y_t = \phi Y_{t-2} + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\epsilon)$

1. Si dica per quali valori di ϕ il processo è stazionario.
2. Si calcoli la $Var(Y_t)$.

Soluzione:

1. Il processo è stazionario se le radici dell'equazione $(1 - \phi B^2) = 0$ sono in modulo maggiori di uno. Tali radici sono $B_{1,2} = \pm\sqrt{1/\phi}$. Quindi deve essere $| \pm\sqrt{1/\phi} |> 1$ da cui segue che deve essere $-1 < \phi < 1$.
2. $Var(Y_t) = Var(\phi Y_{t-2} + \epsilon_t) = \phi^2 Var(Y_{t-2}) + Var(\epsilon_t)$
   In ipotesi di stazionarietà $Var(Y_t) = Var(Y_{t-2})$ quindi:
   $Var(Y_t) = \frac{\sigma^2_\epsilon}{1-\phi^2}$.
   (Si noti che per la positività della varianza deve essere $-1 < \phi < 1$)

Domanda 3

Si supponga che $Y_t = a+bt+S_t+X_t$, dove S_t è la componente stagionale deterministica e periodica con periodo pari a s, mentre X_t è un processo SARIMA$(p,0,q)(P,1,Q)_s$. Si determini quale modello segue il processo $W_t = (1-B^s)Y_t$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} W_t &= Y_t - Y_{t-s} \\ &= (a+bt+S_t+X_t) - (a+b(t-s)+S_{t-s}+X_{t-s}) \\ &= bs + S_t - S_{t-s} + X_t - X_{t-s} \end{aligned}$$

e tenendo conto che $S_t = S_{t-s}$

$$= bs + (1-B^s)X_t$$

pertanto W_t è un SARIMA$(p,0,q)(P,0,D)_s$ con costante pari a bs.

Domanda 4 Dato un modello SARIMA(1,0,0)×(0,1,1)$_4$, calcolare la previsione con orizzonte temporale $k = 5$ sapendo che:

- il parametro AR ϕ_1 è pari a -0,8;
- l'ultimo valore osservato della serie storica è $y_n = 3$;
- $\hat{y}_{n+1|n} = -2$ e $\hat{y}_{n+4|n} = 1$.

Soluzione: Esercizio 7.5 dell'eserciziario.

Il processo indicato si esprime nella forma:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B^4)Y_t = (1 - \Theta_1 B^4)\varepsilon_t.$$

Poiché

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B^4) = 1 - \phi_1 B - B^4 + \phi_1 B^5,$$

il processo può essere riscritto nel modo seguente:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + Y_{t-4} - \phi_1 Y_{t-5} + \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-4}.$$

Il previsore di Y_{n+5} è dunque pari a:

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{n+5|n} &= E_n[Y_{n+5}] \\
&= \phi_1 E_n[Y_{n+4}] + E_n[Y_{n+1}] - \phi_1 E_n[Y_n] + \\
&\quad + E_n[\varepsilon_{n+5}] - \Theta_1 E_n[\varepsilon_{n+1}].
\end{aligned}$$

Il calcolo dei valori attesi condizionati avviene secondo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
E_n[Y_{n+j}] &= \begin{cases} y_{n+j} & j \leq 0 \\ \hat{y}_{n+j|n} & j > 0 \end{cases} \\
E_n[\varepsilon_{n+j}] &= \begin{cases} e_{n+j} & j \leq 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Pertanto, la previsione $\hat{y}_{n+5|n}$ è pari a

$$\hat{y}_{n+5|n} = \phi_1 \hat{y}_{n+4|n} + \hat{y}_{n+1|n} - \phi_1 y_n.$$

Sostituendo i valori noti nella precedente espressione otteniamo il risultato richiesto:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{n+5|n} &= -0,8 - 2 - (-0,8) \cdot 3 \\
&= -0,8 - 2 + 2,4 = -0,4.
\end{aligned}$$

Domanda 5 Data una serie storica $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si dica quali sono gli stimatori della media, μ, della varianza, σ^2 e della funzione di autocovarianza, $\gamma(k)$ di tale serie.

Soluzione: vedi pg. 168 prg 5.3 del libro di testo.

Domanda 6 Data una serie storica mensile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si dica come stimare la componente tendenziale-ciclica tramite il metodo delle medie mobili.

Soluzione: vedi pg.98 prg 3.5 del libro di testo.