SERIE STORICHE

Padova, 16 febbraio 2018

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

1 [2+4]	2 [4+4]	3 [4]	4 [4]	5 [4]	6 [4]	Totale

Domanda 1 Si consideri un processo stocastico, X_t, la cui funzione di autocovarianza sia:

$$\gamma_k = \begin{cases} 2 \quad \text{per} \quad k = 0 \\ 0,5 \quad \text{per} \quad k = \pm 1 \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Dire, **giustificando la risposta**, con che modello della classe ARIMA questa funzione di autocovarianza è coerente.
2. Si calcolino i valori dei parametri del modello, stazionario e invertibile, di cui al punto 1.

Soluzione:

1. La funzione di autocovarianza data è diversa da zero solo per il primo ritardo e poi è sempre nulla, questo è coerente con un modello a media mobile di ordine 1, MA(1), o ARIMA(0,0,1).
2. Un modello MA(1) può scriversi come:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

con $\varepsilon \sim WN(0, \sigma^2)$. Pertanto dobbiamo trovare i valori dei due parametri θ e σ^2.
Sappiamo che, per un processo MA(1), abbiamo:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = (1 + \theta^2)\sigma^2 = 2$$

e

$$\gamma_1 = Cov(X_t, X_{t-1}) = -\theta\sigma^2 = 0,5$$

In pratica ci ritroviamo con un sistema di due equazioni in due incognite. Per trovare θ possiamo osservare che:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = -\frac{\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\sigma^2} = -\frac{\theta}{1+\theta^2} = \frac{0,5}{2} = 0,25$$

da cui otteniamo l'equazione di secondo grado:

$$0,25\theta^2 + \theta + 0,25 = 0$$

che risolta porta alle due soluzioni:

$$\theta_1 \approx -3,73 \qquad e \qquad \theta_2 \approx -0,27.$$

Di queste due soluzioni considero solo θ_2 perché θ_1 è in modulo maggiore di 1 e porta ad un processo MA(1) non invertibile.
Sostituendo θ_2 in una delle due equazioni precedenti, trovo il valore di $\sigma^2 \approx 1,85$.
In sintesi il modello MA(1) stazionario e invertibile cui corrisponde la funzione di autocovarianza data è:

$$X_t = \varepsilon_t + 0,27\varepsilon_{t-1}$$

con $\varepsilon \sim WN(0, 1,85)$.

Domanda 2 Si consideri il processo:

$$X_t = \begin{cases} \varepsilon_t & \text{per } t \text{ pari} \\ \frac{\varepsilon_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}} & \text{per } t \text{ dispari} \end{cases} \tag{1}$$

dove $\epsilon_t \sim IID\mathcal{N}(0,1)$.

1. Si dimostri che il processo $X_t \sim WN(0,1)$.
2. Si trovi la previsione di X_t un passo in avanti, ossia

$$\hat{X}_{n+1} = E[X_{n+1} \mid X_n, \cdots, X_1].$$

(Si ricordi che se $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ allora $E[Z^3] = 0$ e $E[Z^4] = 3$)

Soluzione:

1. Per verificare che $X_t \sim WN(0,1)$ devo verificare che abbia valore atteso nullo, varianza costante e pari a 1 e autocovarianze nulle. Abbiamo:

$$E[X_t] = \begin{cases} E[\varepsilon_t] = 0 \quad \text{per } t \text{ pari} \\ E\left[\frac{\epsilon_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{2}\left(E[\varepsilon_{t-1}^2] - 1\right) = 0 \quad \text{per } t \text{ dispari} \end{cases}$$

(Infatti $E[\varepsilon_{t-1}^2] = Var(\varepsilon_{t-1}) = 1$).
Inoltre:

$$Var[X_t] = \begin{cases} Var[\varepsilon_t] = 1 \quad \text{per } t \text{ pari} \\ Var\left[\frac{\epsilon_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{2}Var(\varepsilon_{t-1}^2) = \frac{1}{2}(E[\varepsilon_{t-1}^4] - 1) = 1 \quad \text{per } t \text{ dispari} \end{cases}$$

Infine:

$$Cov[X_t, X_{t-1}] = \begin{cases} Cov\left[\varepsilon_t, \frac{\varepsilon_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}}\right] = E\left[\varepsilon_t \cdot \frac{\varepsilon_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}E[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}^2 - \varepsilon_t] = 0 \quad \text{per } t \text{ pari} \\ Cov\left[\frac{\varepsilon_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}}, \varepsilon_{t-1}\right] = E\left[\frac{\varepsilon_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}} \cdot \varepsilon_{t-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}E[\varepsilon_{t-1}^3 - \varepsilon_{t-1}] = 0 \quad \text{per } t \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi abbiamo dimostrato quanto si voleva.

2. Se n è pari allora:

$$\hat{X}_{n+1} = E\left[\frac{\varepsilon_n^2 - 1}{\sqrt{2}} \mid \varepsilon_n, \cdots, \varepsilon_0\right] = \frac{\varepsilon_n^2 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{X_n^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

Se, invece, n è dispari, allora:

$$\hat{X}_{n+1} = E[\varepsilon_{n+1} \mid \varepsilon_{n-1} \cdots \varepsilon_0] = E[\varepsilon_{n+1}] = 0$$

Si noti che questo succede perché X_t è WN, e quindi è un processo con componenti incorrelate che, tuttavia, non sono indipendenti.

Domanda 3 Si dispone di una serie storica giornaliera che presenta una componente stagionale costante di periodo 7.

1. Stabilire se una media mobile aritmetica semplice a 7 termini elimina tale stagionalità.
2. Derivare l'associato rapporto di riduzione della varianza
3. Mostrare che la media mobile al punto 1. conserva trend polinomiali di primo grado ma non quelli di secondo grado.

Soluzione (Es. n. 3.2 dell'Eserciziario):

1. Sì, è una proprietà fondamentale della media mobile aritmetica: elimina componenti stagionali (costanti) di periodo *pari* al suo ordine. Si noti che in questo caso essendo il periodo della stagionalità dispari non c'è alcun bisogno di ricorrere alla centratura della media mobile.
2. Il rapporto di riduzione della varianza di una media mobile aritmetica è pari al reciproco del suo ordine. In questo caso risulta pari a 1/7.
3. La somma dei coefficienti della media mobile è pari ad 1. Si tratta inoltre di una media mobile simmetrica. Ne segue che conserva i trend lineari. Il fatto che la somma

$$\sum_{i=-3}^{3} i^2 \vartheta_i$$

   risulti diversa da 0 comporta che la media mobile in questione *non* conservi trend parabolici.

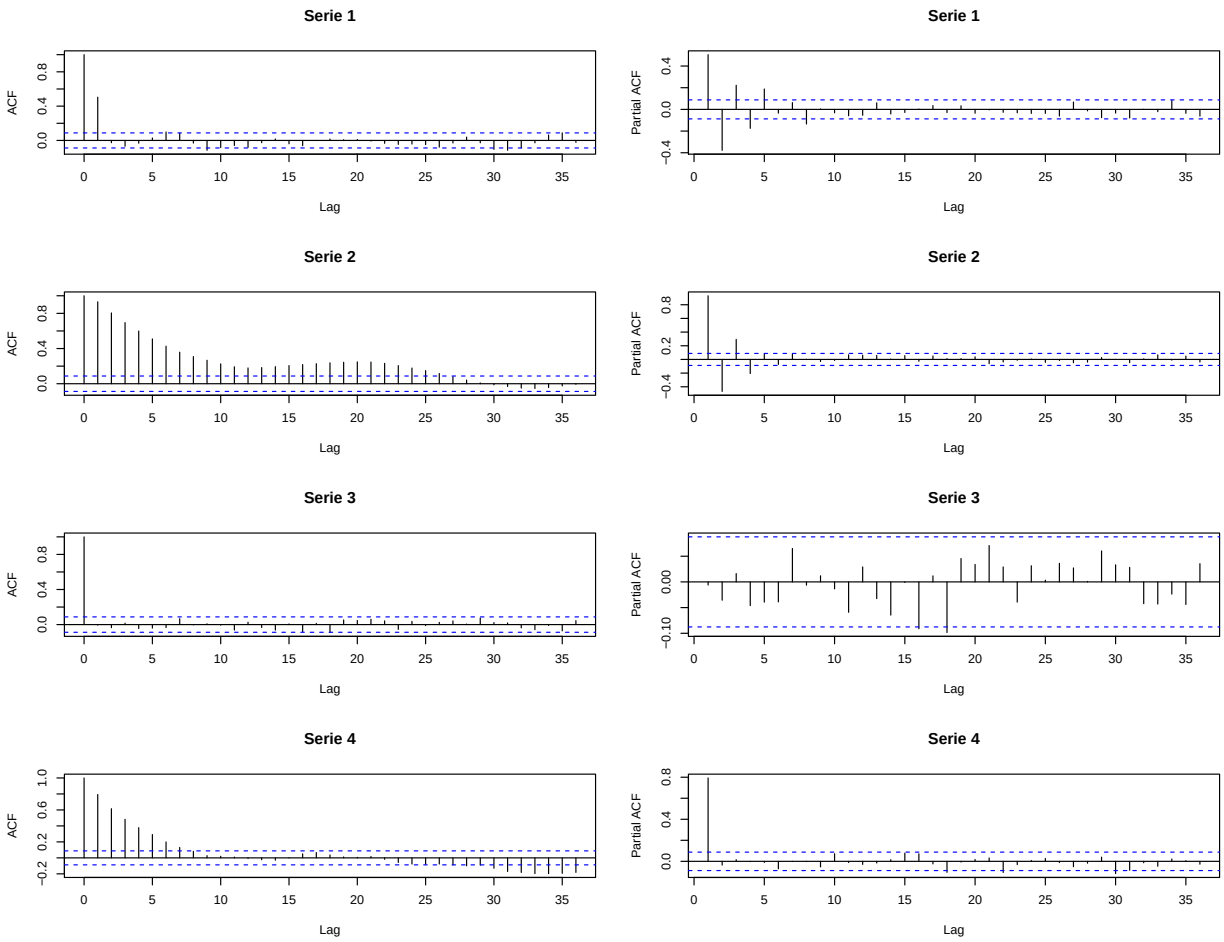
Domanda 4 Assegnare, **giustificando la risposta**, le funzioni di autocorrelazione riportate in figura ai seguenti processi:

(a) $X_t = \varepsilon_t$

(b) $X_t = 0,9X_{t-1} + \varepsilon_t$

(c) $X_t = \varepsilon_t + 0,8\varepsilon_{t-1}$

(d) $X_t = 0,9X_{t-1} + \varepsilon_t + 0,8\varepsilon_{t-1}$



Soluzione:

(a) Il primo processo è un WN, quindi gli corrispondono le funzioni di autocorrelazione della serie 3, infatti tutti i coefficienti di autocorrelazione globale e parziale risultano interni alle bande di confidenza e quindi non significativamente diversi da zero.

(b) Il processo 2 è un processo AR(1), pertanto mi aspetto che la funzione di autocorrelazione globale decada a zero velocemente e vi sia un unico ritardo significativo, il primo, nella funzione di autocorrelazione globale. Questo comportamento lo ritrovo nelle funzioni di autocorrelazione della serie 4.

(c) Il processo 3 è un processo MA(1) cui associo le funzioni di autocorrelazione della serie 1. Infatti, per tale serie solo il roimo coefficiente della funzione di autocorrelazione globale è significativo, mentre la funzione di autocorrelazione parziale va a zero dopo un po' di ritardi.

(d) Il processo 4 è un processo ARMA(1,1). A questo processo rimangono associate le funzioni di autocorrelazione della serie 2 che, infatti, decrescono entrambe a zero.

Domanda 5 Descrivere brevemente la procedura di destagionalizzazione mediante variabili dummy.

Domanda 6 Si descriva brevemente la fase del controllo diagnostico nella procedura Box-Jenkins.