SERIE STORICHE ECONOMICHE

Padova, 3 Aprile 2014

Nome Cognome N. matricola

1 [6]	2.1 [4]	2.2 [4]	3.1 [4]	3.2 [4]	4.1 [4]	4.2 [4]	Totale

Domanda 1 Si consideri un processo stazionario Y_t e si dimostri che, se $\rho_1 < \frac{1}{2}$, il processo $W_t = (1 - B)Y_t$ ha una varianza maggiore di quella di Y_t.

$$Var(W_t) = Var(Y_t - Y_{t-1})$$
$$= Var(Y_t) + Var(Y_{t-1}) - 2\,Cov(Y_t, Y_{t-1}) = (*)$$

$Var(Y_t) = Var(Y_{t-1})$ per la stazionarietà del processo

$$(*) = 2\,Var(Y_t) - 2\,Cov(Y_t, Y_{t-1}) =$$

$$\rho_1 = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-1})}{Var(Y_t)} \Downarrow Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \rho_1 Var(Y_t)$$

$= 2\,Var(Y_t) - 2\rho_1 Var(Y_t) =$ perché

$$= 2(1-\rho_1) Var(Y_t)$$

$> Var(Y_t)$ c.v.d. perché essendo $\rho_1 < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 1 - \rho_1 > \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2(1-\rho_1) > 1$$

Domanda 2 Si considerino i processi:

$$Y_t = \epsilon_t - \frac{1}{6}\epsilon_{t-1} - \frac{1}{6}\epsilon_{t-2}$$

e

$$W_t = \epsilon_t + \epsilon_{t-1} - 6\epsilon_{t-2}$$

con $\epsilon_t \sim WN(0,1)$.

1. Mostrare che i due processi hanno la stessa funzione di autocorrelazione.
2. Dire, giustificando la risposta, se i due processi sono stazionari e/o invertibili.

a) $\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}\left(\varepsilon_t - \frac{1}{6}\varepsilon_{t-1} - \frac{1}{6}\varepsilon_{t-2}\right) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + 1 = \frac{19}{18}$

$\mathrm{Var}(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} - 6\,\varepsilon_{t-2}) = 1 + 1 + 36 = 38$

$\gamma_Y(1) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{36} = -\frac{5}{6} \Rightarrow \rho_Y(1) = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{19}{18}} = -\frac{5}{38}$

$\gamma_Y(2) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) = -\frac{1}{6} \Rightarrow \rho_Y(2) = -\frac{3}{19}$

$\gamma_Y(k) = 0$ per $k \geq 3$ dal momento che $Y_t \sim MA(2)$

$\gamma_W(1) = \mathrm{Cov}(W_t, W_{t-1}) = 1 - 6 = -5 \Rightarrow \rho_W(1) = -\frac{5}{38}$

$\gamma_W(2) = \mathrm{Cov}(W_t, W_{t-2}) = -6 \Rightarrow \rho_W(2) = -\frac{6}{38} = -\frac{3}{19}$

$\gamma_W(k) = 0$ per $k \geq 3$ essendo $W_t \sim MA(2)$

da cui segue che i due processi hanno la stessa f.ne di autocorrelaz.

b) Stazionari (SI), entrambi essendo MA(2)

Per l'invertibilità abbiamo:

$1 - \frac{1}{6}B - \frac{1}{6}B^2 = 0 \quad \Delta = \frac{25}{36} \Rightarrow B_{1,2} = -3,\ 2$ entrambe in modulo maggiori di 1 $\Rightarrow$ INVERTIBILITÀ OK

$1 + B - 6B^2 = 0 \quad \Delta = 25 \Rightarrow B_{1,2} = -1/3,\ 1/2$ entrambe in modulo minori di uno $\Rightarrow$ INVERTIBILITÀ NO

Domanda 3 Si considerino le due medie mobili:

$$M_1 = \left\{[5]; \left[-\frac{21}{286}, \frac{84}{286}, \frac{\mathbf{160}}{\mathbf{286}}\right]\right\}$$

$$M_2 = \left\{[15]; \frac{1}{320}\left[-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, \mathbf{74}\right]\right\}$$

1. Qual è il massimo grado di un trend polinomiale che M_1 e M_2 riescono a conservare?
2. Se si fosse interessati solo ad avere una serie perequata il più regolare possibile, quale delle due medie mobili sarebbe preferibile? Spiegare il perché.

ESERCIZIARIO n. 3.13