SERIE STORICHE

Padova, 19 giugno 2018

Nome ______ Cognome ______ N. matricola ______

Corso di Laurea ______

1 [3+3+1]	2 [1+4]	3 [1+2+2]	4 [5]	5 [4]	6 [4]	Totale

Domanda 1 Si consideri il processo

$$X_t = W_t + \frac{1}{2}W_{t-1} \qquad \text{con} \qquad W_t \sim IID\ U(0,2)$$

1. Calcolare il valore atteso e la varianza di X_t.
2. Calcolare la funzione di autocorrelazione di X_t.
3. Dire, **giustificando la risposta**, se il processo è stazionario.

(N.B. Si ricordi che se $X \sim U(a,b)$ allora $f(x) = \frac{1}{b-a}$ per $x \in [a,b]$, 0 altrimenti)

Soluzione:

1. Si ha:
$$E[W_t] = \int_0^2 \frac{1}{2}x dx = \left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1$$
$$Var(W_t) = E[W_t^2] - E[W_t]^2 = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx - 1 = \left[\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 1 = \frac{1}{3}$$
di conseguenza:
$$E[X_t] = E[W_t] + \frac{1}{2}E[W_{t-1}] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
e
$$Var(X_t) = Var\left(W_t + \frac{1}{2}W_{t-1}\right) = Var(W_t) + \frac{1}{4}Var(W_{t-1}) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}$$
Si osservi che sia il valore atteso, sia la varianza di X_t non dipendono dal tempo e restano costanti per ogni t.

2. Per calcolare la funzione di autocorrelazione devo prima calcolare la funzione di autocovarianza del processo. Si osservi che il processo è un processo $MA(1)$ con errori non gaussiani, quindi la funzione di autocovarianza del processo è nulla per $k > 1$. Per $k = 1$ abbiamo:

$$
\begin{aligned}
Cov(X_t, X_{t-1}) &= Cov\left[\left(W_t + \frac{1}{2}W_{t-1}\right)\left(W_{t-1} + \frac{1}{2}W_{t-2}\right)\right] \\
&= Cov\left(\frac{1}{2}W_{t-1}, W_{t-1}\right) = E\left[\frac{1}{2}W_{t-1}^2\right] - \frac{1}{2} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{2}\left[E[W_{t-1}^2] - 1\right] = \frac{1}{2}Var(W_{t-1}) = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Quindi

$$\rho(1) = \frac{1/6}{5/12} = 0.4$$

mentre $\rho(k) = 0$ per $k > 1$.

3. Il processo è stazionario, perché valore atteso, varianza e autocovarianze del processo non dipendono dal tempo.

Domanda 2 Indicare l'ordine e derivare i coefficienti della media mobile che si ottiene componendo una media mobile aritmetica semplice di ordine 4 ed una media mobile aritmetica semplice di ordine 6.

Soluzione (Es. n. 3.2 dell'Eserciziario):

Indicata con M la media mobile di interesse, si ha $M = M_2 M_1$, con

$$M_1 = \left\{[4]; \frac{1}{4}[1,1,1,1]\right\} \text{ e } M_2 = \left\{[6]; \frac{1}{6}[1,1,1,1,1,1]\right\}.$$

L'ordine di M è 4+6-1=9. Possiamo dunque scrivere $y^{**} = My = M_2 M_1 y = M_2 y^*$. Il primo valore calcolabile per la serie y^{**} è il quinto, di seguito si mostra in dettaglio una possibile procedura di calcolo del valore y_5^{**}. Il primo passaggio riguarda il calcolo dei valori $y^* = M_1 y$ d'interesse:

$$\begin{aligned}
y^*_{[2,3]} &= \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\
y^*_{[3,4]} &= \frac{1}{4}(y_2 + y_3 + y_4 + y_5) \\
y^*_{[4,5]} &= \frac{1}{4}(y_3 + y_4 + y_5 + y_6) \\
y^*_{[5,6]} &= \frac{1}{4}(y_4 + y_5 + y_6 + y_7) \\
y^*_{[6,7]} &= \frac{1}{4}(y_5 + y_6 + y_7 + y_8) \\
y^*_{[7,8]} &= \frac{1}{4}(y_6 + y_7 + y_8 + y_9)
\end{aligned}$$

Successivamente si applica M_2 ai 6 termini calcolati:

$$y_5^{**} = \frac{1}{6}(y^*_{[2,3]} + y^*_{[3,4]} + y^*_{[4,5]} + y^*_{[5,6]} + y^*_{[6,7]} + y^*_{[7,8]}).$$

Organizzando i termini sotto forma matriciale il calcolo dei coefficienti della media mobile M diventa molto più semplice. Infatti,

$$\begin{array}{rcllllllllll}
y_5^{**} = & \frac{1}{6}\frac{1}{4} & (y_1+ & y_2+ & y_3+ & y_4+ & & & & & \\
& & & y_2+ & y_3+ & y_4+ & y_5+ & & & & \\
& & & & y_3+ & y_4+ & y_5+ & y_6+ & & & \\
& & & & & y_4+ & y_5+ & y_6+ & y_7+ & & \\
& & & & & & y_5+ & y_6+ & y_7+ & y_8+ & \\
& & & & & & & y_6+ & y_7+ & y_8+ & y_9) \\
y_5^{**} = & \frac{1}{24} & (y_1+ & 2y_2+ & 3y_3+ & 4y_4+ & 4y_5+ & 4y_6+ & 3y_7+ & 2y_8+ & y_9) & .
\end{array}$$

Generalizzando, si ha

$$y_t^{**} = \frac{1}{24}(y_{t-4} + 2y_{t-3} + 3y_{t-2} + 4y_{t-1} + 4y_t + 4y_{t+1} + 3y_{t+2} + 2y_{t+3} + y_{t+4}).$$

Pertanto $M = \left\{[9]; \frac{1}{24}[1,2,3,4,\mathbf{4}]\right\}$.

Domanda 3 Considera i due processi:

$$X_t = \epsilon_t - \frac{7}{6}\epsilon_{t-1} + \frac{1}{3}\epsilon_{t-2} \qquad \text{e} \qquad Y_t = \frac{5}{12}Y_{t-1} + \frac{1}{6}Y_{t-2} + X_t$$

dove $\epsilon_t \sim WN(0,1)$.

1. Mostra che Y_t può essere scritto come un $ARMA(p,q)$ e detrmina gli ordini p e q.
2. Dire, giustificando la risposta, se il processo Y_t è stazionario e invertibile.
3. Calcolare la varianza di Y_t.

Soluzione

1. Sostituendo X_t in Y_t si ottiene:

$$Y_t = \frac{5}{12}Y_{t-1} + \frac{1}{6}Y_{t-2} + \epsilon_t - \frac{7}{6}\epsilon_{t-1} + \frac{1}{3}\epsilon_{t-2}$$

   che è un processo $ARMA(2,2)$.

2. Il processo può essere riscritto in termini dell'operatore ritardo come:

$$\left(1 - \frac{5}{12}B - \frac{1}{6}B^2\right)Y_t = \left(1 - \frac{7}{6}B + \frac{1}{3}B^2\right)\epsilon_t$$

   Per verificare se il processo è stazionario devo verificare se le radici del polinomio associato alla parte AR sono in modulo maggiori di 1. Risolvendo l'equazione:

$$1 - \frac{5}{12}B - \frac{1}{6}B^2 = 0$$

   trovo le due radici $B_1 = 1.5$ e $B_2 = -4$. Essendo entrambe in modulo maggiori di uno, il processo è stazionario.
   Per verificare se il processo è invertibile devo verificare se le radici del polinomio associato alla parte MA sono in modulo maggiori di 1. Risolvendo l'equazione:

$$1 - \frac{7}{6}B + \frac{1}{3}B^2 = 0$$

   trovo le due radici $B_1 = 1.5$ e $B_2 = 2$. Essendo entrambe in modulo maggiori di uno, il processo è invertibile.

3. Si osservi che i due polinomi hanno una radice in comune che può essere eliminata, pertanto il processo è in realtà un processo $ARMA(1,1)$ che può scriversi come:

$$\left(1 - \frac{2}{3}B\right)\left(1 + \frac{1}{4}B\right)Y_t = \left(1 - \frac{2}{3}B\right)\left(1 - \frac{1}{2}B\right)\epsilon_t$$

   ossia

$$\left(1 + \frac{1}{4}B\right)Y_t = \left(1 - \frac{1}{2}B\right)\epsilon_t$$

   o anche

$$Y_t = -\frac{1}{4}Y_{t-1} + \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1}$$

pertanto la varianza è:

$$Var(Y_t) = \frac{1}{16}Var(Y_{t-1}) + Var(\epsilon_t) + \frac{1}{4}Var(\epsilon_{t-1}) + \frac{1}{4}Cov(Y_{t-1}, \epsilon_{t-1})$$

essendo il processo stazionario $Var(Y_t) = Var(Y_{t-1})$, inoltre $Cov(Y_{t-1}, \epsilon_{t-1}) = Var(\epsilon_t) = 1$, quindi:

$$(1 - \frac{1}{16})Var(Y_t) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

o

$$\frac{15}{16}Var(Y_t) = \frac{3}{2}$$

da cui si ricava, infine $Var(Y_t) = \frac{8}{5} = 1.6$.

Domanda 4 Sia $X_t \sim SARIMA(1,0,0)(1,0,0)_4$ con $\mid \phi_1 \mid < 1$ e $\mid \Phi_1 \mid < 1$.

Si trovi la rappresentazione $AR(p)$ di X_t.

Soluzione: Possiamo scrivere X_t come:

$$(1-\phi_1 B)(1-\Phi_1 B^4)X_t = \epsilon_t$$

con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2$. Svilippando il prodotto otteniamo:

$$(1-\phi_1 B - \Phi_1 B^4 + \phi_1 \Phi_1 B^5)Y_t = \epsilon_t$$

da cui:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \Phi_1 Y_{t-4} - \phi_1 \Phi_1 Y_{t-5}$$

che è un processo $AR(5)$ con i coefficienti relativi al secondo e terzo ritardo pari a zero.

Domanda 5 Descrivere brevemente l'effetto di Slutsky-Yule.

Domanda 6 Dire cosa si intende per *processo trend-stazionario* e *processo differenza-stazionario* e fornirne un esempio.