SERIE STORICHE

Padova, 6 luglio 2018

Nome Cognome N. matricola

Corso di Laurea

1 [3+3]	2 [2+2+2]	3 [2+2+2]	4 [4]	5 [4]	6 [4]	Totale

Domanda 1 Si consideri il processo

$$X_t = \epsilon_t + 0,2\epsilon_{t-1} \qquad \text{con} \qquad \epsilon_t \sim IID\ N(0, 0, 000625)$$

per $t = 1, 2, \ldots, 100$. Si supponga anche che $\epsilon_{100} = 0, 01$.

1. Si calcoli la previsione un passo in avanti per X_t assieme all'errore standard del suo errore di previsione.
2. Si calcoli la previsione due passi in avanti per X_t assieme al suo errore di previsione.

Soluzione:

1. Si ha:
$$\hat{X}_{101} = E[X_{101} \mid I_{100}] = E[\epsilon_{101} + 0, 2\epsilon_{100}]$$
ed essendo, per la regola dei valori attesi condizionati, $E[\epsilon_{101} \mid I_{100}] = 0$ risulta:
$$\hat{X}_{101} = 0, 2 * 0, 01 = 0, 002.$$
L'errore di previsione è
$$e_{101} = X_{101} - \hat{X}_{101} = \epsilon_{101} + 0, 2\epsilon_{100} - 0, 2\epsilon_{100} = \epsilon_{101}$$
per cui
$$Var(\epsilon_{101}) = \sigma_\epsilon^2 = 0, 000625$$
da cui l'errore standard di previsione un passo in avanti risulta essere:
$$\sigma_\epsilon = \sqrt{0, 000625} = 0, 025.$$
2. Essendo il processo un $MA(1)$, la previsione h passi in avanti per $h > 1$ è pari a zero. L'errore di previsione risulta quindi pari a:
$$e_{100+h} = X_{100+h} = \epsilon_{100+h} + 0, 2\epsilon_{100+h-1}$$
da cui la varianza dell'errore di previsione:
$$Var(e_{100+h}) = Var(\epsilon_{100+h} + 0, 2\epsilon_{100+h-1}) = Var(\epsilon_{100+h}) + 0, 04Var(\epsilon_{100+h}) = 0.00065$$
e quindi l'errore standard risulta essere 0.0255.

Domanda 2 Si dispone di una serie storica giornaliera che presenta una componente stagionale costante di periodo 7. (a) Stabilire se una media mobile aritmetica semplice a 7 termini elimina tale stagionalità. (b) Derivare l'associato rapporto di riduzione della varianza (c) Mostrare che la media mobile al punto (a) conserva trend polinomiali di primo grado ma non quelli di secondo grado.

Soluzione (Es. n. 3.2 dell'Eserciziario):

1. Sì, è una proprietà fondamentale della media mobile aritmetica: elimina componenti stagionali (costanti) di periodo *pari* al suo ordine. Si noti che in questo caso essendo il periodo della stagionalità dispari non c'è alcun bisogno di ricorrere alla centratura della media mobile.
2. Il rapporto di riduzione della varianza di una media mobile aritmetica è pari al reciproco del suo ordine. In questo caso risulta pari a 1/7.
3. La somma dei coefficienti della media mobile è pari ad 1. Si tratta inoltre di una media mobile simmetrica. Ne segue che conserva i trend lineari. Il fatto che la somma

$$\sum_{i=-3}^{3} i^2 \vartheta_i$$

risulti diversa da 0 comporta che la media mobile in questione *non* conservi trend parabolici.

Domanda 3 Considera i due processi:

$$X_t = \frac{5}{12}X_{t-1} + \frac{1}{6}X_{t-2} + \epsilon_t \qquad \text{e} \qquad Y_t = X_t - \frac{7}{6}X_{t-1} + \frac{1}{3}X_{t-2}$$

dove $\epsilon_t \sim WN(0,1)$.

1. Mostra che Y_t può essere scritto come un $ARMA(p,q)$ e determina gli ordini p e q.
2. Dire, giustificando la risposta, se il processo Y_t è stazionario e invertibile.
3. Calcolare la varianza di Y_t.

Soluzione

1. Conviene riscrivere i due processi in termini dell'operatore ritardo B, per cui si ottiene:

$$\left(1 - \frac{5}{12}B - \frac{1}{6}B^2\right) X_t = \epsilon_t$$

e

$$Y_t = \left(1 - \frac{7}{6}B + \frac{1}{3}B^2\right) X_t$$

a questo punto basta sostituire

$$X_t = \left(1 - \frac{5}{12}B - \frac{1}{6}B^2\right)^{-1} \epsilon_t$$

in Y_t per ottenere:

$$\left(1 - \frac{5}{12}B - \frac{1}{6}B^2\right) Y_t = \left(1 - \frac{7}{6}B + \frac{1}{3}B^2\right) \epsilon_t$$

che sembra essere un processo $ARMA(2,2)$.

2. Per verificare se il processo è stazionario devo verificare se le radici del polinomio associato alla parte AR sono in modulo maggiori di 1. Risolvendo l'equazione:

$$1 - \frac{5}{12}B - \frac{1}{6}B^2 = 0$$

trovo le due radici $B_1 = 1.5$ e $B_2 = -4$. Essendo entrambe in modulo maggiori di uno, il processo è stazionario.
Per verificare se il processo è invertibile devo verificare se le radici del polinomio associato alla parte MA sono in modulo maggiori di 1. Risolvendo l'equazione:

$$1 - \frac{7}{6}B + \frac{1}{3}B^2 = 0$$

trovo le due radici $B_1 = 1.5$ e $B_2 = 2$. Essendo entrambe in modulo maggiori di uno, il processo è invertibile.

3. Si osservi che i due polinomi hanno una radice in comune che può essere eliminata, pertanto il processo è in realtà un processo $ARMA(1,1)$ che può scriversi come:

$$\left(1-\frac{2}{3}B\right)\left(1+\frac{1}{4}B\right)Y_t = \left(1-\frac{2}{3}B\right)\left(1-\frac{1}{2}B\right)\epsilon_t$$

ossia

$$\left(1+\frac{1}{4}B\right)Y_t = \left(1-\frac{1}{2}B\right)\epsilon_t$$

o anche

$$Y_t = -\frac{1}{4}Y_{t-1} + \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1}$$

pertanto la varianza è:

$$Var(Y_t) = \frac{1}{16}Var(Y_{t-1}) + Var(\epsilon_t) + \frac{1}{4}Var(\epsilon_{t-1}) + \frac{1}{4}Cov(Y_{t-1}, \epsilon_{t-1})$$

essendo il processo stazionario $Var(Y_t) = Var(Y_{t-1})$, inoltre $Cov(Y_{t-1}, \epsilon_{t-1}) = Var(\epsilon_t) = 1$, quindi:

$$(1-\frac{1}{16})Var(Y_t) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

o

$$\frac{15}{16}Var(Y_t) = \frac{3}{2}$$

da cui si ricava, infine $Var(Y_t) = \frac{8}{5} = 1.6$.

Domanda 4 Dato un modello SARIMA(0,0,1)$\times$(1,1,0)$_4$, calcolare la previsione con orizzonte temporale $k = 8$ sapendo che

- il parametro AR stagionale Φ_1 è pari a 0,3;
- l'ultimo valore osservato della serie storica è $y_n = 4$;
- $\hat{y}_{n+4|n} = 2$.

Soluzione (Es. 7.6 Eserciziario):

Il processo ha la forma compatta

$$(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B^4)Y_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t.$$

Il polinomio AR generalizzato è pari a

$$(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B^4) = 1 - \Phi_1 B^4 - B^4 + \Phi_1 B^8.$$

Sfruttando questa espressione, il processo originario si trasforma in

$$Y_t = (1 + \Phi_1)Y_{t-4} - \Phi_1 Y_{t-8} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

Il previsore di Y_{n+8} è dunque pari a:

$$\hat{Y}_{n+8|n} = (1 + \Phi_1)E_n[Y_{n+4}] - \Phi_1 E_n[Y_n] + E_n[\varepsilon_{n+8}] - \theta_1 E_n[\varepsilon_{n+7}].$$

Pertanto, utilizzando le espressioni indicate nell'esercizio precedente, la previsione di Y_{n+8} secondo questo processo è

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+8|n} &= (1 + \Phi_1)\hat{y}_{n+4|n} - \Phi_1 y_n \\ &= 1,3 \cdot 2 - 0,3 \cdot 4 = 2,6 - 1,2 = 1,4. \end{aligned}$$

Domanda 5 Descrivere brevemente come stimare un trend lineare in una serie storica secondo l'approccio classico.

Domanda 6 Dire come costruire un intervallo di previsione di livello $(1 - \alpha)$.