SERIE STORICHE

Padova, 18 giugno 2019

Nome   Cognome   N. matricola

Corso di Laurea

1 [1+2+3+2]	2 [4+1]	3 [2+2+2]	4 [1+1+1]	5 [4]	6 [4]	Totale

Domanda 1 Si consideri il processo

$$Y_t = \phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t$$

con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\epsilon)$ e $\mid \phi_2 \mid < 1$.

1. Dire a che classe appartiene Y_t.
2. Dire, giustificando la risposta, se il processo è stazionario.
3. Calcolare i valori attesi condizionati $E[Y_t \mid I_{t-2}]$ e $E[Y_t \mid I_{t-1}]$, quindi commentare il risultato ottenuto (con I_t si intende l'insieme di tutte le informazioni passate fino al tempo t).
4. Calcolare $\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1})$ e $\gamma_2 = Cov(Y_t, Y_{t-2})$.

Soluzione:

1. Y_t appartiene alla classe dei processi AR(2)
2. In termini dell'operatore ritardo B il processo può essere riscritto come:

   $$(1 - \phi_2 B^2) Y_t = \epsilon_t.$$

   Il processo è stazionario se le radici dell'equazione caratteristica associata:

   $$(1 - \phi_2 B^2) = 0$$

   sono esterne al cerchio di raggio unitario (o in modulo maggiori di uno). Essendo

   $$B_2 = \pm \frac{1}{\phi_2}$$

   tale radice è esterna al cerchio di raggio unitario se $\mid \phi_2 \mid < 1$ che è una delle nostre assunzioni, pertanto il processo considerato è stazionario.
3. Applicando le regole dei valori condizionati si ottiene:

   $$E[Y_t \mid I_{t-2}] = E[\phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t \mid I_{t-2}] = \phi_2 y_{t-2}$$

   e

   $$E[Y_t \mid I_{t-1}] = E[\phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t \mid I_{t-2}] = \phi_2 y_{t-2}.$$

   Ovviamente il risultato non cambia perché la conoscenza di y_{t-1} non serve a prevedere Y_t.

4. Si ha:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= Cov[(\phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t), (\phi_2 Y_{t-3} + \epsilon_{t-1})] \\
&= \phi_2^2\, Cov(Y_{t-2}, Y_{t-3}) + \phi_2\, Cov(Y_{t-2}, \epsilon_{t-1}) + \phi_2\, Cov(\epsilon_t, Y_{t-3}) + Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) \\
&= \phi_2^2\, \gamma_1
\end{aligned}$$

da cui

$$(1 - \phi_2^2)\gamma_1 = 0$$

e quindi $\gamma_1 = 0$. Inoltre:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= Cov[(\phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t), (\phi_2 Y_{t-4} + \epsilon_{t-2})] \\
&= \phi_2^2\, Cov(Y_{t-2}, Y_{t-4}) + \phi_2\, Cov(Y_{t-2}, \epsilon_{t-2}) + \phi_2\, Cov(\epsilon_t, Y_{t-4}) + Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-2}) \\
&= \phi_2^2\, \gamma_1
\end{aligned}$$

da cui

$$\gamma_2 = \phi_2^2 \gamma_2 + \phi_2 \sigma_\epsilon^2$$

e quindi

$$\gamma_2 = \frac{\phi_2}{1 - \phi_2^2} \sigma_\epsilon^2$$

(abbiamo sfruttato il fatto che Y_t è un processo stazionario e gli $\epsilon_t \sim WN$ e quindi sono incorrelati fra loro).

Domanda 2

Si considerino i due processi:

1. $$Y_t = 1,5Y_{t-1} - 0,5Y_{t-2} - 1,7\epsilon_{t-1} + 0,7\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$$

2. $$X_t = 0,2X_{t-1} + 0,8X_{t-2} - \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

dove $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$ quindi:

1. Si dica se tali processi sono stazionari e/o invertibili.
2. Si dica a che processo della classe ARIMA appartengono

Soluzione:

1. Per vedere se i processi sono stazionari e/o invertibili bisogna calcolare le radici delle equazioni caratteristiche associate alla parte AR e MA, quindi riscrivo i processi in funzione dell'operatore ritardo B. Riguardo il primo processo si ha:

   $$(1 - 1,5B + 0,5B^2)Y_t = (1 - 1,7B + 0,7B^2)\epsilon_t$$

   che quindi sembra essere un $ARMA(2,2)$. Risolvendo:

   $$1 - 1,5B + 0,5B^2 = 0$$

   si trova $B_1 = 1$ e $B_2 = 2$, mentre risolvendo:

   $$1 - 1,7B + 0,7B^2 = 0$$

   si trova $B_1 = 1$ e $B_2 = 10/7 = 1,43$. Questo significa che possiamo riscrivere il processo come:

   $$(1 - B)(1 - 0,5B)Y_t = (1 - B)(1 - 0,7)\epsilon_t$$

   ossia

   $$(1 - 0,5B)Y_t = (1 - 0,7)\epsilon_t,$$

   che è sia stazionario sia invertibile.

   Per quanto riguarda il secondo processo, si può scrivere:

   $$(1 - 0,2B - 0,8B^2)X_t = (1 - B)\epsilon_t$$

   che sembra essere un $ARMA(2,1)$ non invertibile. Tuttavia,

   $$1 - 0,2B - 0,8B^2 =$$

   ha come soluzioni $B_1 = 1$ e $B_2 = -1,25$. Quindi:

   $$(1 - B)(1 + 0,8B)X_t = (1 - B)\epsilon_t$$

   ossia

   $$(1 + 0,8B)X_t = \epsilon_t$$

   che è sia stazionario sia invertibile.

2. $Y_t \sim ARIMA(1,0,1)$ e $X_t \sim ARIMA(1,0,0)$.

Domanda 3
Si è adattato alla serie storica semestrale y_t, per $t = 1, \ldots, T$, il seguente modello additivo:

$$y_t = 14d_{1t} + 3d_{2t} + 0,5t + \varepsilon_t, \quad Var\{\varepsilon_t\} = 4$$

con la variabile d_{1t} uguale ad uno se il periodo t cade nel primo semestre ed uguale a zero altrimenti e, analogamente, la variabile d_{2t} uguale ad uno se il periodo t cade nel secondo semestre ed uguale a zero altrimenti.

1. A quanto ammonta mediamente la differenza dovuta alla componente stagionale tra il valore y_t in un primo semestre e il valore di y_t in un secondo semestre?
2. Supponiamo che i primi due valori della serie ($t = 1, 2$) siano relativi al primo e al secondo semestre di un certo anno e supponiamo che in tali periodi i valori osservati siano, rispettivamente, 16 e 2. Si calcolino i corrispondenti valori destagionalizzati.
3. Supponiamo che i valori osservati arrivino fino al periodo $T = 20$ e che tale periodo cada in un secondo semestre. Calcolare i valori previsti di y_t per i periodi $t = 21, 22$.

Soluzione: (Esercizio n. 2.4 dell'eserciziario)

1. Indichiamo con S_t la componente stagionale

$$S_t = 14d_{1t} + 3d_{2t}$$

e calcoliamo il valore atteso della differenza fra S_{t_0} e S_{t_0-1}, dove con t_0 indichiamo un generico primo semestre:

$$\begin{aligned} E(S_{t_0} - S_{t_0-1}) &= E(S_{t_0}) - E(S_{t_0-1}) = \\ & \quad 14d_{1t_0} - 3d_{2t_0-1} = 11. \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è stato ottenuto sulla base della natura deterministica delle variabili *dummy* d_{1t} e d_{2t}: il valore atteso di una componente deterministica è infatti la componente stessa. Si noti, inoltre, che il risultato non cambia se si considerano dei semestri non contigui tra loro, poiché la struttura dei coefficienti stagionali è fissata nel tempo.

2. Come ormai noto, il calcolo dei valori destagionalizzati sottintende l'utilizzo dei coefficienti ideali di stagionalità. Anche in questo caso il modello presenta coefficienti grezzi, in quanto la loro somma è differente da zero. Nell'ipotesi di un modello additivo, deriviamo quindi i coefficienti ideali di stagionalità sottraendo la media $\bar{\gamma}^*$ ai coefficienti grezzi

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 &= \gamma_1^* - \bar{\gamma}^* = 14 - 8,5 = 5,5 \\ \hat{\gamma}_2 &= \gamma_2^* - \bar{\gamma}^* = 3 - 8,5 = -5,5. \end{aligned}$$

Ovviamente, nel caso di un modello semestrale i coefficienti ideali devono essere uguali e di segno opposto affinché la loro somma risulti nulla. I valori destagionalizzati per le osservazioni fornite sono dunque

$$\begin{aligned} y_1^d &= y_1 - \hat{\gamma}_1 = 16 - 5,5 = 10,5 \\ y_2^d &= y_2 - \hat{\gamma}_2 = 2 - (-5,5) = 7,5. \end{aligned}$$

3. Infine, l'esercizio richiede il calcolo delle previsioni per la serie y_t per i due semestri $t = 21, 22$, tempi riferiti rispettivamente ad un primo e ad un secondo semestre. Applicando l'operatore valore atteso condizionato all'informazione posseduta al tempo 20, si ottengono le seguenti previsioni per i due semestri

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{21} = E(Y_{21}|I_{20}) &= E(14d_{1,21} + 3d_{2,21} + 0,5(21) + \varepsilon_{21}) = \\
&\quad 14 + 10,5 = 24,5 \\
\hat{y}_{22} = E(Y_{22}|I_{20}) &= E(14d_{1,22} + 3d_{2,22} + 0,5(22) + \varepsilon_{22}) = \\
&\quad 3 + 11 = 14
\end{aligned}$$

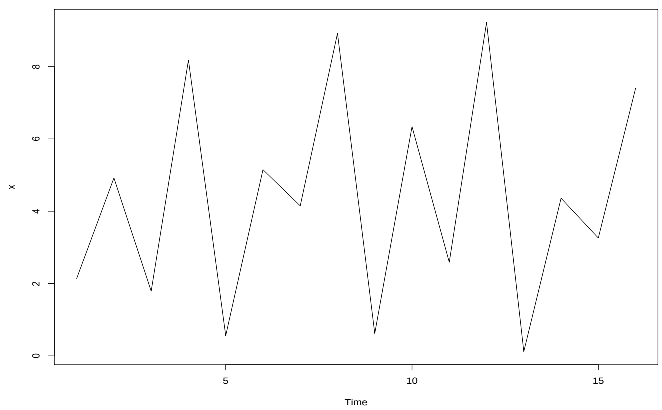
per i quali si è assunto $E(\varepsilon_{21}) = E(\varepsilon_{22}) = 0$.

Domanda 4

Si consideri la seguente serie storica trimestrale:

$$x = (2,14\ \ 4,92\ \ 1,79\ \ 8,18\ \ 0,56\ \ 5,15\ \ 4,15\ \ 8,92\ \ 0,62\ \ 6,34\ \ 2,59\ \ 9,22\ \ 0,12\ \ 4,36\ \ 3,26\ \ 7,40)$$

il cui grafico è riportato nella figura sottostante:



1. Si calcolino i primi 4 valori della media mobile aritmetica di ordine 4, x^*.
2. Si calcolino i primi quattro valori della media mobile $x^{**} = \left\{[5]; \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \mathbf{\frac{2}{8}}\right\}$
3. Si dica quale media mobile può essere utilizzata per destagionalizzare la serie data.

Soluzione:

1. Si ha:

$$x^*_{2,3} = \frac{2,14 + 4,92 + 1,79 + 8,18}{4} = 4,2575$$
$$x^*_{3,4} = \frac{4,92 + 1,79 + 8,18 + 0,56}{4} = 3,8625$$
$$x^*_{4,5} = \frac{1,79 + 8,18 + 0,56 + 5,15}{4} = 3,92$$
$$x^*_{5,6} = \frac{8,18 + 0,56 + 5,15 + 4,15}{4} = 4,51$$

2. Si ha:

$$x^{**}_3 = \frac{2,14 + 2*4,92 + 2*1,79 + 2*8,18 + 0,56}{8} = 4,06$$
$$x^{**}_4 = \frac{4,92 + 2*1,79 + 2*8,18 + 2*0,56 + 5,15}{8} = 3,89$$
$$x^{**}_5 = \frac{1,79 + 2*8,18 + 2*0,56 + 2*5,15 + 4,15}{8} = 4,215$$
$$x^{**}_5 = \frac{8,18 + 2*0,56 + 2*5,15 + 2*4,15 + 8,92}{8} = 4,6025$$

3. Entrambe le medie mobili possono essere utilizzate per destagionalizzare la serie data, tuttavia il rapporto di riduzione della prima media mobile è $\frac{1}{4}$, mentre quello della seconda media mobile è $\frac{1}{8}$, quindi questa è preferibile.

Domanda 5 Si consideri il processo ARMA$(1, 1)$ con costante diversa da zero e se ne calcoli valore atteso e varianza.

Soluzione: pagine 179 e 180 del libro di testo

Domanda 6 Dopo aver dato la definizione di trend deterministico e stocastico, si dia un esempio di un processo con trend deterministico e di uno con trend stocastico.