0

SERIE STORICHE ECONOMICHE

Padova, 2 luglio 2014

Nome Cognome N. matricola

1 [6]	2.1 [3]	2.2 [2]	3 [5]	4 [5]	5 [6]	6 [3]	Totale

Domanda 1 Data una serie, y_t, $t = 1, 2, \ldots, 6$, realizzazione di un processo stazionario Y_t, si provi che se le autocovarianze del processo sono tutte positive, allora la varianza dello stimatore della media del processo, $Var(\hat{\mu})$, sarà maggiore rispetto al caso in cui tutte le autocovarianze siano nulle.

Essendo il processo stazionario, la media campionaria è un "buon" stimatore della media del processo, per cui

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{t=1}^{6} y_t$$

di conseguenza

$$Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{36} Var\left(\sum_{t=1}^{6} y_t\right) = \frac{1}{36} \Big[Var(y_1) + Var(y_2) + \ldots + Var(y_6) +$$

$$+ 2Cov(y_1, y_2) + 2Cov(y_1, y_3) + \ldots + 2Cov(y_1, y_6) +$$
$$+ 2Cov(y_2, y_3) + \ldots + 2Cov(y_2, y_6) + \ldots + 2Cov(y_5, y_6) \Big]$$

ora essendo Y_t stazionario si ha che $Var(y_1) = \ldots = Var(y_6)$ e per ipotesi tutte le covarianze sono positive, quindi

$$Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{36}[A + B] \quad \text{dove } A = 6\,Var(y_1)$$
$$B = 2[Cov(y_1, y_2) \ldots] > 0$$

Se le autocovarianze fossero tutte nulle, allora

$$Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{36}(Var(y_1) + \ldots + Var(y_6)) = \frac{1}{36} A < \frac{1}{36}[A + B]$$

e quindi la tesi è dimostrata

Domanda 2 Dato il processo $Y_t = a + bt + ct^2 + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$, si consideri $X_t = (1-B)^2 Y_t$.

1. Si stabilisca a che classe di processi appartiene X_t.
2. Si dica se X_t è un processo stazionario e/o invertibile.

~~[Si ricordi che $\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a}$ e che il modulo di un numero complesso, $a + i \cdot b$, è pari a $\sqrt{a^2 + b^2}$]~~

$$X_t = (1 - B)^2 Y_t = (1 - 2B + B^2) Y_t =$$

$$= Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} =$$

$$= a + bt + ct^2 + \varepsilon_t - 2\left[a + b(t-1) + c(t-1)^2 + \varepsilon_{t-1}\right] +$$

$$+ a + b(t-2) + c(t-2)^2 + \varepsilon_{t-2}$$

$$= \cancel{a} + \cancel{bt} + \cancel{ct^2} + \varepsilon_t - \cancel{2a} - \cancel{2bt} + \cancel{2b} - \cancel{2ct^2} + \cancel{4ct} \underline{-2c} - 2\varepsilon_{t-1} +$$

$$+ \cancel{a} + \cancel{bt} - \cancel{2b} + \cancel{ct^2} - \cancel{4ct} + \underline{4c} + \varepsilon_{t-2}$$

$$= \cancel{2c + 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon} \quad 2c + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

quindi $X_t \sim MA(2)$ con media pari a $E[X_t] = \mu = 2c$ ed è certamente stazionario, per valutare l'invertibilità trovo le radici di

$$1 - 2B + B^2 = 0$$

$$(1 - B)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{1,2} = 1$$

Ci sono due radici unitarie quindi il processo NON è invertibile.

Domanda 3 Si dica, giustificando la risposta, se il processo

$$(1 - 0.5B)(1 - 0.7B)(1 - 0.2B)Y_t = \epsilon_t$$

con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$, è stazionario e invertibile e lo si riscriva utilizzando l'usuale rappresentazione $[\phi(B)Y_t = \theta(B)\epsilon_t]$.

Il processo è un AR(3) quindi certamente invertibile e anche stazionario dal momento che è evidente che tutte le radici di

$$(1-0.5B)(1-0.7B)(1-0.2B)=0$$

sono in modulo maggiori di 1.

Essendo

$$\phi(B) = (1-0.5B)(1-0.7B)(1-0.2B)$$
$$= (1-0.7B-0.5B+0.35B^2)(1-0.2B)$$
$$= (1-1.2B+0.35B^2)(1-0.2B)$$
$$= 1-\underline{1.2}B+0.3\underset{\sim}{5}B^2-0.\underline{2}B+0.2\underset{\sim}{4}B^2-0.07B^3$$
$$= 1-1.4B+0.59B^2-0.07B^3$$

Il processo può essere riscritto come

$$(1-1.4B+0.59B^2-0.07B^3)Y_t = \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

o, equivalentemente come

$$Y_t = 1.4Y_{t-1} - 0.59Y_{t-2} + 0.07Y_{t-3} + \varepsilon_t$$

Domanda 4 Dato il processo

$$Y_t = 2 + 0.8Y_{t-1} - 0.1Y_{t-2} + \epsilon_t$$

con $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$ e quattro osservazioni da tale processo

$$(4, 3, 1, 2.5)$$

si calcolino le previsioni per Y_5, Y_6 e Y_7.

le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$1 - 0.8B + 0.1B^2 = 0 \qquad \Delta = 0.8^2 - 4 \cdot 0.1 = 0.24$$

sono $B_{1,2} = 1.55051$ / 6.44949

quindi il processo è stazionario.

Applicando le regole del valore atteso condizionato trovo:

$$\hat{y}_5 = E_4[y_5] = 2 + 0.8\,E_4[y_4] - 0.1\,E_4[y_3] + E_4[\varepsilon_5]$$
$$= 2 + 0.8\,y_4 - 0.1\,y_3 + 0$$
$$= 2 + 0.8 \cdot 2.5 - 0.1 \cdot 1 = \boxed{3.9}$$

$$\hat{y}_6 = E_4[y_6] = 2 + 0.8\,E_4[y_5] - 0.1\,E_4[y_4] + E_4[\varepsilon_6]$$
$$= 2 + 0.8\,\hat{y}_5 - 0.1\,y_4 + 0$$
$$= 2 + 0.8 \cdot 3.9 - 0.1 \cdot 2.5 = \boxed{4.87}$$

$$\hat{y}_7 = E_4[y_7] = 2 + 0.8\,E_4[y_6] - 0.1\,E_4[y_5] + E_4[\varepsilon_7]$$
$$= 2 + 0.8\,\hat{y}_6 - 0.1 \cdot \hat{y}_5 + 0$$
$$= 2 + 0.8 \cdot 4.87 - 0.1 \cdot 3.9 = \boxed{5.506}$$