ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2016-2017

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

7 luglio 2017

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{2x}(x^2 - x - 2).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, studiare la continuità e la derivabilità di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità e i limiti di f' se significativi;

(c) studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f;

(d) determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento.

(a) Il dominio è $\mathbb{R}$. Non sussistono simmetrie o periodicità .

Dato che $e^{2x} > 0$, si ha che $f(x) \geq 0$, se e solo se $x^2 - x - 2 \geq 0$. Quindi la funzione è positiva per $x < -1$, e $x > 2$, si annulla in $x = -1, 2$ ed è negativa altrove.

(b) La funzione è derivabile (e quindi continua) in tutto il dominio. Inoltre si vede facilmente che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}(x^2 - x - 2) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}(x^2 - x - 2)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)x = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = +\infty.$$

Quindi a $+\infty$ non c'è asintoto orizzontale né obliquo. Inoltre, per il confronto tra infiniti

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}(x^2 - x - 2) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{e^{-2x}} = 0.$$

Da questo deduciamo che $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

(c) Essendo

$$f'(x) = 2e^{2x}(x^2 - x - 2) + e^{2x}(2x - 1) = e^{2x}(2x^2 - 5)$$

si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2 - 5 > 0$ ovvero $x > \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.5811$ oppure $x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \approx -1.5811$. Quindi la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}]$, $[+\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty)$ e decrescente in $[-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}]$. Il punto $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ è un massimo (relativo) mentre $\sqrt{\frac{5}{2}}$ è un minimo (assoluto) ed è $f(-\sqrt{\frac{5}{2}}) \approx 0.0881$, $f(-\sqrt{\frac{5}{2}}) \approx -25.5412$.

(d) Da

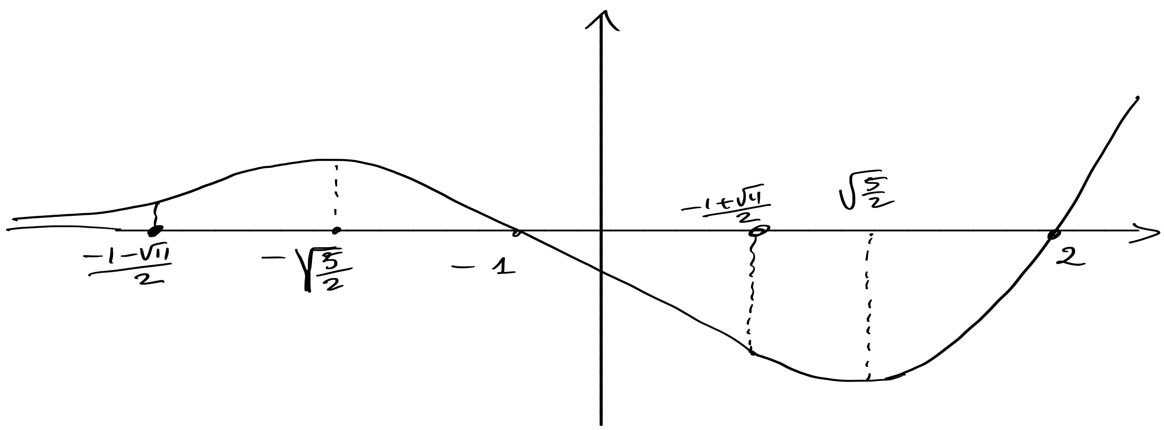
$$f'(x) = 2e^{2x}(x^2 - x - 2) + e^{2x}(2x - 1) = e^{2x}(2x^2 - 5)$$

ricaviamo che

$$f''(x) = 2e^{2x}(2x^2 - 5) + e^{2x}(4x) = 2e^{2x}(2x^2 + 2x - 5)$$

e quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $2x^2 + 2x - 5 > 0$ da cui $x \in (-\infty, \frac{-1-\sqrt{11}}{2})$, $x \in (\frac{-1+\sqrt{11}}{2}, +\infty)$. Ne consegue che la funzione è convessa in $x \in (-\infty, \frac{-1-\sqrt{11}}{2})$ (ove $\frac{-1-\sqrt{11}}{2} \approx -2.1583$), $x \in (\frac{-1+\sqrt{11}}{2}, +\infty)$ (ove $\frac{-1+\sqrt{11}}{2} \approx 1.1583$) e concava altrove.

(e) Per il grafico si veda la figura.



Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+5}\right)^{x^2}.$$

Svolgimento. Riscriviamo

$$\left(1+\frac{1}{x^2+5}\right)^{x^2}=e^{x^2\log\left(1+\frac{1}{x^2+5}\right)}.$$

Per $x\to+\infty$, $\frac{1}{x^2+5}\to 0$ e quindi, ricordando lo sviluppo di Taylor $\log(1+t)=t+o(t)$ per $t\to 0$, abbiamo che

$$\log\left(1+\frac{1}{x^2+5}\right)=\frac{1}{x^2+5}+o\left(\frac{1}{x^2+5}\right).$$

Sostituendo nella funzione otteniamo

$$\left(1+\frac{1}{x^2+5}\right)^{x^2}=e^{x^2\log\left(1+\frac{1}{x^2+5}\right)}=e^{\frac{x^2}{x^2+5}+o\left(\frac{x^2}{x^2+5}\right)}.$$

Dunque

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+5}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x^2}{x^2+5}+o\left(\frac{x^2}{x^2+5}\right)}=e.$$

Un altro possibile svolgimento è il seguente. Posto $t=x^2+5$, ricaviamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+5}\right)^{x^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t-5}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-5}=e.$$

Esercizio 3 (8 punti)

1. Calcolare una primitiva della funzione x^3e^{-x}.
2. Calcolare
$$\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}dx.$$

Svolgimento. 1. Si integra più volte per parti. Osservato che:

$$\int x^3e^{-x}dx=-x^3e^{-x}+3\int x^2e^{-x}dx,$$

$$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx,$$

$$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-e^{-x}(x+1)+C.$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}\int x^3e^{-x}dx &= -x^3e^{-x}+3(-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx) \\ &= -x^3e^{-x}+3(-x^2e^{-x}-2e^{-x}(x+1))+C. \\ &= -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+C. \qquad (1)\end{aligned}$$

2. Si vede subito dal confronto tra infiniti che

$$\lim_{M\to+\infty} -e^{-M}(M^3+3M^2+6M+6) = \lim_{M\to+\infty} -\frac{(M^3+3M^2+6M+6)}{e^M} = 0$$

ed essendo

$$-e^{-0}(0^3+3\cdot 0^2+6\cdot 0+6) = -6$$

deduciamo che

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx &= \lim_{M\to+\infty}\left[-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)\right]_0^M \\ &= \lim_{M\to+\infty} -e^{-M}(M^3+3M^2+6M+6)-(-e^{-0}(0^3+3\cdot 0^2+6\cdot 0+6)) = 6.\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Trovare e disegnare il dominio della funzione di due variabili

$$f(x,y) = \log\sqrt{x(y+1)}.$$

Determinare il gradiente di f in $P = (1,0)$ e l'equazione del piano tangente al grafico della funzione in tale punto P.

Svolgimento. Il dominio è costituito da quei punti per cui $x(y+1) > 0$ e quindi facilmente dalle coppie (x,y) tali che

- $x > 0$, $y+1 > 0$ ovvero $y > -1$ oppure
- $x < 0$, $y+1 < 0$ ovvero $y < -1$.

Visto che se $x > 0$, $y > -1$ allora

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x(y+1)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x(y+1)}}\cdot(y+1) = \frac{1}{2x}$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x(y+1)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x(y+1)}}\cdot x = \frac{1}{2(y+1)}$,

deduciamo che il gradiente richiesto $\nabla f(1,0) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

L'equazione del piano tangente in un generico punto (x_0,y_0) al grafico della funzione f è

$$z = f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

e quindi nel caso richiesto, posto $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, essendo $f(1,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1/2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1/2$, abbiamo che l'equazione richiesta è

$$z = \frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-0) = \frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}.$$

ovvero

$$x+y+2z = 1.$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.