ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2016-2017

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

14 settembre 2017

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(\frac{x-1}{x+1}).$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, studiare la continuità e la derivabilità di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità e i limiti di f' se significativi;

(c) studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f;

(d) determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento

(a) Il dominio consiste nei punti per cui $\frac{x-1}{x+1} > 0$ ovvero $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. La funzione non è periodica e non ha particolari simmetrie. Il segno della funzione si ricava risolvendo $\frac{x-1}{x+1} > 1$, cioè $\frac{x-1}{x+1} - 1 > 0$ da cui si ricava che la funzione è positiva per $x < -1$ e negativa per $x > -1$.

(b) Si vede facilmente che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

In virtù di quanto calcolato, $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$. La funzione è continua nel dominio ma non è estindibile per continuità a ± 1. Inoltre, nel dominio è ovunque derivabile ed è

$$f^{'}(x) = \frac{x+1}{x-1} \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1}.$$

(c) osservato che

$$f^{'}(x) = \frac{2}{x^2-1} > 0$$

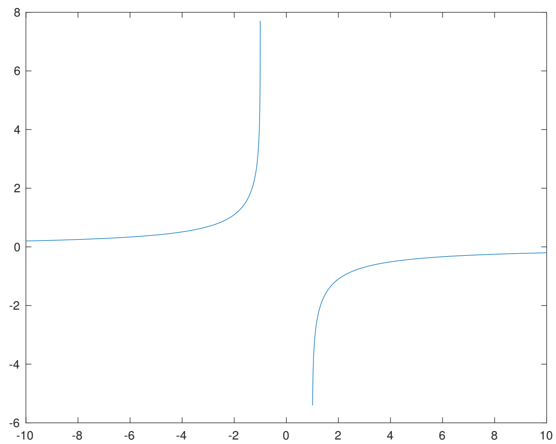

Figura 1: Grafico di f.

se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, la funzione è strettamente crescente nel dominio. Visti gli asintoti orizzontali, non ha punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. L'immagine della funzione è $Im(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(d) da

$$f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

si vede che $f''(x) < 0$ in $(1, +\infty)$ e $f''(x) > 0$ in $(-\infty, -1)$. Quindi è convessa in $(-\infty, -1)$ e concava in $(1, +\infty)$.

(e) per il grafico si veda la figura.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite, al variare del parametro reale $a > 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3e^n - 2\log n + (\sin 2n)(\cos 3n)}{a^n - 2n^5}.$$

Svolgimento

Dal confronto degli infiniti, essendo $(\sin 2n)(\cos 3n)$ limitata, il numeratore è asintotico a $3e^n$. Per quanto riguarda il denominatore, se $a \in (0, 1]$, a^n tende a zero e allora il denominatore è asintotico a $2n^5$, altrimenti ad a^n.

Ne consegue, nuovamente dal confronto degli infiniti, che se $a \in (0, 1]$ il limite richiesto vale quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3e^n}{-2n^5}$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3e^n - 2\log n + (\sin 2n)(\cos 3n)}{a^n - 2n^5} = -\infty.$$

Se $a > 1$ allora, per quanto detto,

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{3e^n - 2\log n + (\sin 2n)(\cos 3n)}{a^n - 2n^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3e^n}{a^n} = 3 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{a}\right)^n.$$

Di conseguenza se

- $a \in (1, e)$ vale $L = +\infty$,
- se $a = e$ è $L = 3$,
- se $a \in (e, +\infty)$ risulta $L = 0$.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin x) \cos x dx.$$

Svolgimento

Posto $t = \sin(x)$ otteniamo, $dt = \cos(x)dx$ e quindi

$$\int \log(\sin x) \cos x dx = \int \log(t) dt.$$

Da

$$\int \log(t) dt = \int 1 \cdot \log(t) dt = t \cdot (\log(t) - 1) + C = \sin(x) \cdot (\log(\sin(x)) - 1) + C$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin x) \cos x dx &= \sin(\pi/2) \cdot (\log(\sin(\pi/2)) - 1) - \sin(\pi/4) \cdot (\log(\sin(\pi/4)) - 1) \\ &= (\log(1) - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1\right) = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2/n} - 1}{n + 5}.$$

Svolgimento

La serie è a termini positivi. Osserviamo che da $e^x \sim 1 + x$, se $x \to 0$, abbiamo $e^{2/n} - 1 \sim 1 + 2/n - 1 = 2/n$ per $n \to +\infty$ ed inoltre $n + 5 \sim n$. La serie richiesta, per il teorema del confronto asintotico, ha lo stesso comportamento di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2/n}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ed è quindi convergente in quanto lo è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.