ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2016-2017

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

2 febbraio 2017

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{x}{x-1}}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Facoltativo: calcolare i limiti di f' se significativi.

Svolgimento

(a) Il dominio della funzione è $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Inoltre la funzione non è pari nè dispari e la funzione non è periodica. Infine, essendo $e^{\frac{x}{x-1}} > 0$, la funzione è positiva per $x > 0$ (ove definita), negativa per $x < 0$ e nulla in zero.

(b) Si vede facilmente che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} xe^{\frac{x}{x-1}} &= \lim_{x\to 1^+} x \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{x-1}} \\ &= \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{x-1}} = +\infty, \end{aligned} \tag{1}$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} xe^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{x-1}} = 0, \tag{2}$$

Quindi in 0 non si può prolungare la funzione per continuità.

Inoltre, per quanto riguarda gli asintoti obliqui,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x-1}} = e$$

e

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - e\cdot x = \lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{x}{x-1}} - ex \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} xe(e^{\frac{x}{x-1}-1} - 1) = e \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{\frac{1}{x-1}} - 1) \end{aligned} \tag{3}$$

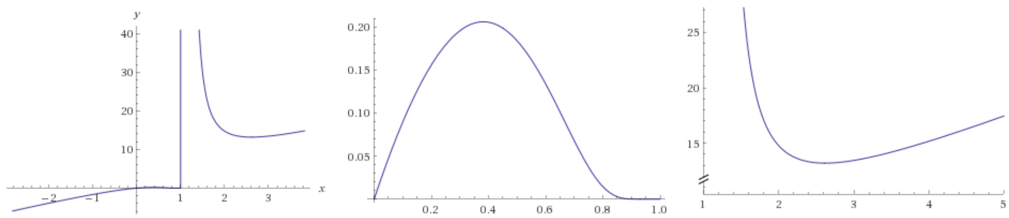

Figura 1: Grafico di f in $(-5,5)$ e in un intorno di 1.

Ricordato che se $x \to \pm\infty$ allora

$$e^{\frac{x}{x-1}-1} - 1 \sim \frac{1}{x-1}$$

abbiamo che

$$ex(e^{\frac{1}{x-1}} - 1) \sim \frac{ex}{x-1}$$

e quindi

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} ex(e^{\frac{1}{x-1}} - 1) = e.$$

Alternativamente, posto $t = \frac{1}{x-1}$, ovvero $x = 1 + \frac{1}{t}$, visto che se $x \to \pm\infty$ allora $t \to 0$,

$$\begin{aligned} q &= e \cdot \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{\frac{1}{x-1}} - 1) = e \cdot \lim_{t\to 0}(1 + \frac{1}{t})(e^t - 1) \\ &= e \cdot \lim_{t\to 0}(e^t - 1) + e \cdot \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \\ &= e \end{aligned} \tag{4}$$

in quanto, per un noto limite notevole, $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$.

Quindi, $y = e \cdot x + e$ è asintoto obliquo tanto a $-\infty$ che a $+\infty$.

(c). Nel dominio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, la funzione è somma di funzioni derivabili (con continuità) in $\mathbb{R}$ e quindi è pure derivabile in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (e di conseguenza continua). Inoltre, per la regola di derivazione di un prodotto di funzioni derivabili,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{x}{x-1}} + x \cdot \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}} \\ &= e^{\frac{x}{x-1}} - x \cdot \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}} \\ &= e^{\frac{x}{x-1}} \left(1 - x \cdot \frac{1}{(x-1)^2}\right) = e^{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Essendo $e^{\frac{x}{x-1}} > 0$ e $(x-1)^2 > 0$, ricaviamo che $f'(x) > 0$ quando $x^2 - 3x + 1 > 0$. Visto che $x^2 - 3x + 1 = 0$ ha soluzioni $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$, deduciamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Di conseguenza $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è un massimo locale e $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ un minimo locale.

(d). Per il grafico si veda la figura.

(facoltativo). L'unico limite significativo delle derivate che si deve calcolare è il limite per $x \to 1^-$. Opero il cambio di variabile $t = \frac{1}{x-1}$, ovvero $x = 1 + \frac{1}{t}$. Osserviamo che se $x \to 1^-$

allora $t \to -\infty$. Inoltre $\frac{x}{x-1} = t+1$, $\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2} = t^2(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - 1) = 1 - t + t^2$. Sostituendo nel limite, e ricordando la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}\right) = \lim_{t\to-\infty} e^{t+1}(1-t+t^2) = \lim_{t\to-\infty} \frac{1-t+t^2}{e^{-t-1}} = 0. \tag{6}$$

Alternativamente, essendo

$$f'(x) \sim e^{\frac{1}{x-1}} \frac{(-1)}{(x-1)^2}$$

si ottiene facilmente il limite richiesto.

Esercizio 2 (8 punti)
Determinare al variare di $\alpha > 0$ reale il valore del limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2) - \log(1+x^2)}{x^4 + x^\alpha}.$$

Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione $f(x)$ si può prolungare per continuità in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)-\log(1+x^2)}{x^4+x^\alpha} & x > 0, \\ x\sin(\frac{1}{x^2}) & x < 0. \end{cases}$$

Svolgimento Osserviamo che il numeratore è asintotico a $x^4/2$. Infatti, dall'espansione $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ (valida in un intorno di 0) ricaviamo

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

mentre da $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (valida in un intorno di 0) abbiamo

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Di conseguenza, in un intorno di 0

$$\sin(x^2) - \log(1+x^2) = \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Così ,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2) - \log(1+x^2)}{x^4 + x^\alpha} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4/2}{x^4 + x^\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + x^{\alpha-4}}. \end{aligned}$$

Se

- $\alpha > 4$, allora $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-4} = 0$ e di conseguenza il limite richiesto vale $\frac{1}{2}$.
- $\alpha = 4$, allora $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-4} = 1$ e di conseguenza il limite richiesto vale $\frac{1}{4}$.

- $0 < \alpha < 4$, allora $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-4} = +\infty$ e di conseguenza il limite richiesto vale 0.

Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, osserviamo che essendo $\sin(\frac{1}{x^2})$ limitata e $\lim_{x\to 0^-} x = 0$, allora

$$\lim_{x\to 0^-} x\sin(\frac{1}{x^2}) = 0.$$

Di conseguenza, visto il punto precedente, la funzione è prolungabile per continuità se e solo se $0 < \alpha < 4$.

Esercizio 3 (8 punti)

1. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x - 3\sqrt{x} + 2)} dx.$$

2. (facoltativo) Dire se e $\int_9^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x-3\sqrt{x}+2)} dx$ converge e, in caso affermativo, calcolarlo.

Svolgimento Posto $t = \sqrt{x}$, abbiamo che $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ e quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x - 3\sqrt{x} + 2)} dx = \int \frac{2}{t^2 - 3t + 2} dt = 2\int \frac{1}{t^2 - 3t + 2} dt.$$

Osservato che $t^2 - 3t + 2 = 0$ se e solo se $t = 1$ o $t = 2$, cerchiamo A, B, tali che

$$\frac{1}{t^2 - 3t + 2} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1}.$$

Dato che

$$\frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t-2)}{(t-2)(t-1)} = \frac{(A+B)t - A - 2B}{t^2 - 3t + 2}$$

allora devo imporre che A, B risolvano il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases}$$

e quindi $A = 1$, $B = -1$.

Così, per $t = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}(x - 3\sqrt{x} + 2)} dx &= 2\int \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} dt = 2(\log(|t-2|) - \log(|t-1|)) + C \\ &= 2\log\frac{|t-2|}{|t-1|} + C = 2\log\frac{|\sqrt{x}-2|}{|\sqrt{x}-1|} + C \end{aligned} \tag{7}$$

(**facoltativo**) La convergenza dell'integrale dipende dal fatto che per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x - 3\sqrt{x} + 2)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}\cdot x} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

e che $\int_9^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ esiste finito.

Per calcolarlo, da

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-3\sqrt{x}+2)}dx \quad = \quad 2\log\frac{|\sqrt{x}-2|}{|\sqrt{x}-1|}+C \tag{8}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\int_9^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x-3\sqrt{x}+2)}dx &= 2\lim_{x\to+\infty}\log\frac{|\sqrt{x}-2|}{|\sqrt{x}-1|}-2\log\frac{|\sqrt{9}-2|}{|\sqrt{9}-1|} \\ &= 0-2\log\left(\frac{1}{2}\right)=\log(4). \end{aligned}\tag{9}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza della serie

$$\sum_n \frac{n^2 3^n}{(n-1)!}.$$

Svolgimento
Dal criterio del rapporto, posto $a_n = \frac{n^2 3^n}{n!}$, abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2 3^{n+1}}{(n+1-1)!}}{\frac{n^2 3^n}{(n-1)!}} = \frac{(n+1)^2 3^{n+1}}{n!}\,\frac{(n-1)!}{n^2 3^n} = \frac{3(n+1)^2}{n}\,\frac{1}{n^2} = \frac{3(n+1)^2}{n^3} \to 0$$

e di conseguenza la serie è convergente.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.