ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2015-2016

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

23 giugno 2016

IAM: es 1, 2, 3, 4 (due ore). IAM1, v.o.: es 1, 2 (un'ora) . IAM2, v.o.: es 3, 4 (un'ora). IAM1+2: es 1, 2, 3, 4 (due ore)

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{2x} - e^x - 2.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) Calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento

(a)

- Determinare il dominio: $\mathbb{R}$.
- Eventuali simmetrie: la funzione non ha simmetrie.
- Periodicità: la funzione non è periodica.
- Segno di f: essendo
$$f(x) = e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$$
si deduce che $f(x) \geq 0$ se e solo se $e^x - 2 > 0$ ovvero $x \geq \log(2)$.

(b-c) La funzione f è sempre continua, poichè lo sono e^{2x} e e^x. Inoltre è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$, dato che lo sono e^{2x} e e^x.

Non è difficile vedere che

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

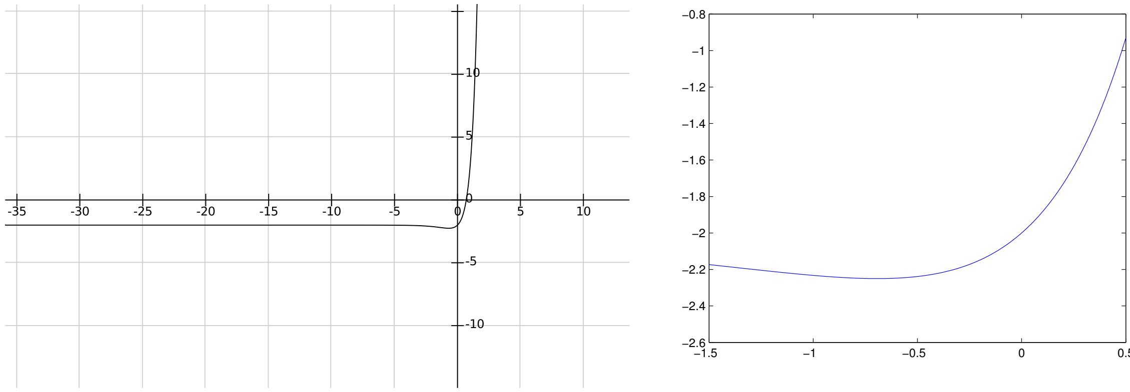

Figura 1: Grafico di f in $(-35, 10)$ e in $(-1.5, 0.5)$.

Di conseguenza, vi è un asintoto orizzontale $y = -2$ a $-\infty$ e non si presentano asintoti a $+\infty$.

Per lo studio dei massimi e minimi, da

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$$

si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2e^x - 1 \geq 0$ ovvero $x \geq -\log(2)$. Di conseguenza $x = -\log(2)$ è l'unico punto estremale della funzione ed è un minimo globale.

(d) Osserviamo che da

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x.$$

abbiamo

$$f''(x) = 4e^{2x} - e^x = e^x(4e^x - 1).$$

e dunque $f''(x) \geq 0$ se e solo se $4e^x - 1 \geq 0$ ovvero $x \geq -\log(4)$. Di conseguenza, la funzione f è concava in $(-\infty, -\log(4))$, convessa in $(-\log(4), +\infty)$ e ha un flesso in $x = -\log(4)$.

(e) Per il grafico si veda la figura.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare il valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^7 + 2}{n^2 + 7 + \cos n} \arcsin\left(\frac{n^3 + \sin n}{n^8 + 1}\right).$$

Svolgimento

Essendo $\arcsin(x) \sim x$ per $x \approx 0$, e $\frac{n^3+\sin n}{n^8+1} \to 0$ per $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^7 + 2}{n^2 + 7 + \cos n} \cdot \arcsin\left(\frac{n^3 + \sin n}{n^8 + 1}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^7 + 2}{n^2 + 7 + \cos n} \cdot \frac{n^3 + \sin n}{n^8 + 1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{10}}{n^{10}} = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Esercizio 3 (8 punti)
i) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \left(\frac{\log x}{\log^2 x + 1}\right) \frac{1}{x} dx.$$

ii) Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ il seguente integrale converge:

$$\int_2^{+\infty} \left(\frac{\log x}{\log^\alpha x + 1} \right) \frac{1}{x} dx.$$

Svolgimento

(i) Posto $y = \log^2(x) + 1$, da $dy = \frac{2\log(x)}{x} dx$, $\log^2(1) + 1 = 1$, $\log^2(e) + 1 = 2$ deduciamo dal teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_1^e \left(\frac{\log x}{\log^2 x + 1} \right) \frac{1}{x} dx \quad = \quad \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \log(y)|_1^2 = \frac{1}{2}(\log(2) - \log(1)) = \frac{1}{2} \log(2).$$

(ii) Posto $y = \log(x)$, da $dy = \frac{1}{x} dx$, effettuando la sostituzione, abbiamo

$$\int_2^{+\infty} \left(\frac{\log x}{\log^\alpha x + 1} \right) \frac{1}{x} dx \quad = \quad \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{y}{y^\alpha + 1} dy. \tag{2}$$

Visto che per $x \to +\infty$ si ha $\frac{y}{y^\alpha+1} \sim \frac{1}{y^{\alpha-1}}$, per il criterio di convergenza asintotica, l'integrale richiesto converge se e solo se converge

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{y^{\alpha-1}} dy$$

ovvero per $\alpha - 1 > 1$, cioè per $\alpha > 2$.

Esercizio 4 (8 punti)
Data la funzione $f(x, y) = xy - x^2 - y^2$,
i) trovare i punti critici e studiarne la natura.
ii) Determinare massimi e minimi della funzione nella palla chiusa $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento

(i) Essendo

$$\nabla f(x, y) = (y - 2x, x - 2y) = 0$$

se e solo se

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \tag{3}$$

risolvendo il sistema lineare (3), ad esempio per sostituzione, si ottiene che l'unico punto estremale è $P = (0, 0)$.

Essendo la matrice Hessiana $H(0, 0)$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

definita negativa, il punto $(0, 0)$ è un punto di massimo locale.

(ii) Il punto $P = (0,0)$ sta nella palla chiusa $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ e quindi è un punto di massimo globale in B per f (essendolo in $\mathbb{R}^2$). Altri possibili punti estremali possono essere individuati mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Definita

$$F(x,y,\lambda) := xy - x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

abbiamo

$$\nabla F(x,y,\lambda) \quad = \quad (y - 2x - 2\lambda x, x - 2y - 2\lambda y, x^2 + y^2 - 1) \tag{5}$$

e quindi i punti estremali verificano il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y - 2x - 2\lambda x = 0 \\ x - 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

ovvero

$$\begin{cases} y = 2(\lambda + 1)x \\ x = 2(\lambda + 1)y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Dalla prima e seconda equazione, si riconosce per sostituzione che deve essere

$$y = 2(\lambda + 1)x = 2(\lambda + 1) \cdot 2(\lambda + 1)y = 4(\lambda + 1)^2 y \tag{8}$$

che ha per soluzione

- $y = 0$, ma in tal caso sarebbe $x = 0$ dalla seconda equazione di (8) ma in tal caso non verificherebbe la terza equazione di (8), ovvero $x^2 + y^2 - 1 = 0$;
- oppure, dividendo ambo i membri di (8) per $y \neq 0$, ricaviamo

  $$1 = 4(\lambda + 1)^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 8\lambda + 3 = 0$$

  che ha per soluzioni $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$.

  – nel caso $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ il sistema (7) diventa

  $$\begin{cases} y = x \\ x = y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

  e quindi basta cercare i punti di intersezione della bisettrice $y = x$ con la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, ovvero $P_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Una verifica diretta mostra che

  $$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}.$$

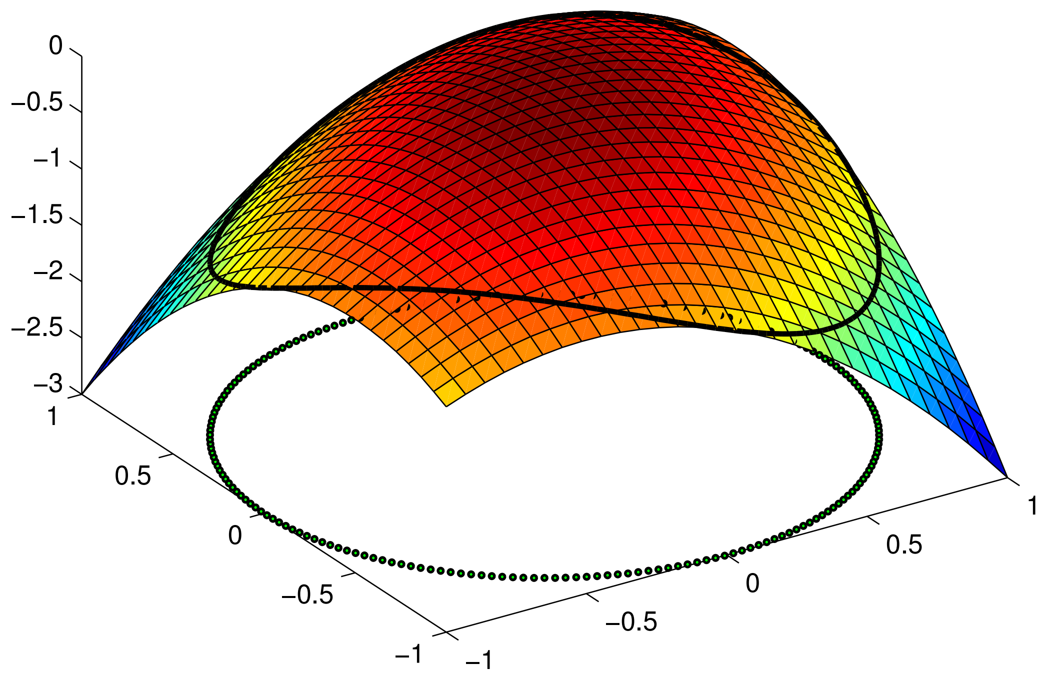

Figura 2: Grafico di f. Vengono evidenziati i valori della funzione in alcuni punti del cerchio unitario B.

– nel caso $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ il sistema (7) diventa

$$\begin{cases} y = -x \\ x = -y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

e quindi basta cercare i punti di intersezione della bisettrice $y = -x$ con la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, ovvero $P_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_4 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Una verifica diretta mostra che

$$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{3}{2}.$$

Di conseguenza $P_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_4 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ sono punti di minimo assoluti nel dominio B. Il punto di massimo assoluto risulta $(0, 0)$ ed è $f(0, 0) = 0$.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.