ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

4 febbraio 2015

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right)$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;
(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;
(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f;
(d) disegnare un grafico qualitativo di f.
FACOLTATIVO:
i) Calcolare i limiti di f' se significativi;
ii) Calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento

(a) L'unico punto che non appartiene al dominio è dove si annulla $e^x - 1$, cioè $x = 0$. Quindi il dominio è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Non ci sono simmetrie o periodicità. Poichè $\arctan(t) \geq 0$ se e solo se $t \geq 0$, deduciamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se $\frac{e^x}{e^x-1} \geq 0$ e quindi $x \geq 0$.

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$ e $x = 0$. Da

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) = \arctan(1) = \pi/4,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) = \arctan(0) = 0,$$

deduciamo che ci sono a $\pm\infty$ due asintoti orizzontali. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to0^-} \arctan\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) = -\pi/2,$$

$$\lim_{x\to0^+} \arctan\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) = \pi/2.$$

La funzione non si può quindi prolungare per continuità in 0 poichè il limite sinistro e destro non coincidono.

(c) La funzione dove è definita è continua e derivabile. Poichè

$$D\frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x \cdot (e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$$

la funzione $\frac{e^x}{e^x-1}$ è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ (e ivi derivabile). Siccome la funzione arctan è crescente e derivabile in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ragionando sulle composte di funzioni monotone, deduciamo che f è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ (e ivi derivabile).

Il conto esplicito della derivata di f è:

$$D\arctan\frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + (\frac{e^x}{e^x-1})^2}\frac{e^x \cdot (e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2 + e^{2x}} < 0.$$

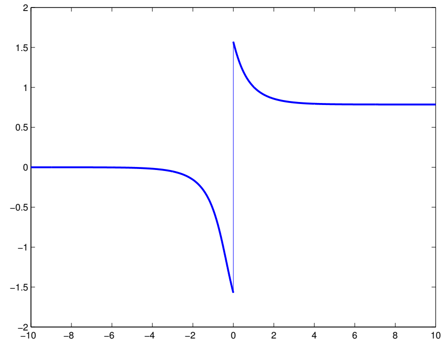

Figura 1: Grafico di f in $[-10, 10]$.

Inoltre poichè arctan è crescente, la funzione f ha massimo o minimo dove ha massimo o minimo il suo argomento $\frac{e^x}{e^x-1}$. Poichè $\frac{e^x}{e^x-1}$ è sempre decrescente nel dominio e è non definita in 0 (in cui ci sta un salto e f non è definita), non ha massimi e minimi.

La derivata seconda di f è

$$f''(x) = -\frac{e^x(1-2e^{2x}}{\Big((e^x-1)^2+e^{2x}\Big)^2}$$

quindi si annulla quando $x = -\frac{\log 2}{2}$. La funzione quindi è convessa per ogni $x > 0$ e cambia concavità in $x = -\frac{\log 2}{2}$, passando da concava a convessa.

(d) La funzione ha il grafico in figura.

Esercizio 2 (8 punti)
(a) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x^2)+x^4}{x^\alpha + x^4}$$

per ogni valore del parametro $\alpha > 0$ reale.
(b) Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ reale affinché la funzione $f(x)$ sia continua in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^2)+x^4}{x^\alpha+x^4} & x > 0, \\ 2\log(1+x^2)+x^3 & x \le 0, \end{cases}$$

Svolgimento

(a) Da $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$ in un intorno di 0, deduciamo che posto $t = x^2$ il numeratore va come

$$1 - (1 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)) + x^4 \sim \frac{3}{2}x^4.$$

- Se $\alpha \in (0, 4)$, allora il denominatore va come x^α e quindi il limite vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^4}{x^\alpha} = 0.$$

- Se $\alpha = 4$ allora il denominatore è $2x^4$ e quindi il limite vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^4}{2x^4} = 3/4.$$

- Se $\alpha > 4$ allora il denominatore va come x^4 e quindi il limite vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^4}{x^4} = 3/2.$$

(b) Dal risultato precedente, ed essendo
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$
deduciamo che la funzione è continua per $\alpha \in (0,4)$.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale definito
$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+9}dx.$$

FACOLTATIVO: Studiare al variare di $\alpha > 0$ reale, la convergenza dell'integrale $\int_1^{+\infty} \sin(\frac{1}{x^\alpha})\frac{1}{x^2+4x+9}dx$.

Svolgimento

Calcoliamo per prima cosa l'integrale indefinito. Posto $t = e^x$, da $dt = e^x dx$ abbiamo che
$$I := \int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+9}dx = \int \frac{1}{t^2+4t+9}dt$$
Poiche l'equazione $t^2+4t+9=0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, procediamo con la tecnica del completamento dei quadrati. Osserviamo che
$$t^2+4t+9 = t^2+4t+4-4+9 = (t+2)^2+5$$
e quindi, per $s = (t+2)/\sqrt{5}$, $ds = dt/\sqrt{5}$
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t^2+4t+9}dt = \int \frac{1}{(t+2)^2+5}dt = \frac{1}{5}\int \frac{1}{((t+2)/\sqrt{5})^2+1}dt = \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{1}{(s^2+1)}ds \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(s)+c = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan((t+2)/\sqrt{5})+c = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan((e^x+2)/\sqrt{5})+c \end{aligned} \tag{1}$$
Per il teorema fondamentale del calcolo
$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+9}dx = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan((e^1+2)/\sqrt{5}) - \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan((e^0+2)/\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{5}\Big(\arctan((e+2)/\sqrt{5}) - \arctan(3/\sqrt{5})\Big).$$
Facoltativo:
la funzione $\sin(\frac{1}{x^\alpha})\frac{1}{x^2+4x+9} \sim \frac{1}{x^{\alpha+2}}$ per $x \to +\infty$, quindi $f(x)$ è integrabile se e solo se $\alpha+2>1$ cioè per ogni $\alpha > -1$.

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \tan\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}.$$

Svolgimento

- La serie è assolutamente convergente se converge
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\tan\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}.$$
Poichè $\frac{1}{\sqrt{n^2+4}} \sim \frac{1}{n}$ è infinitesimo e $\tan(x) \sim x$, il comportamento della serie è uguale a quello di
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$
e quindi la serie diverge.
- Poichè l'argomento $a_n = \tan\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ è positivo, decrescente e infinitesimo, la serie converge per il Criterio di Leibniz. Per dimostrare che la successione è decrescente si può dire che è composizione di una funzione crescente per una decrescente.Altrimenti si può studiare la monotonia della funzione $f(x) = \tan\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ per x grandi, studiandone il segno della derivata prima.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

4 febbraio 2015

TEMA 2

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2+e^x}{e^x-1}\right)$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;
(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;
(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f;
(e) disegnare un grafico qualitativo di f.
FACOLTATIVO:
i) Calcolare i limiti di f' se significativi;
ii) Calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento

(a) L'unico punto che non appartiene al dominio è dove si annulla $e^x - 1$, cioè $x = 0$. Quindi il dominio è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Non ci sono simmetrie o periodictà . Poichè $\arctan(t) \geq 0$ se e solo se $t \geq 0$, deduciamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se $(\frac{2+e^x}{e^x-1}\} \geq 0$ e quindi $x \geq 0$.

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$ e $x = 0$. Da

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{2+e^x}{e^x-1}\right) = \arctan(1) = \pi/4,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{2+e^x}{e^x-1}\right) = \arctan(-2) \approx -1.1071,$$

deduciamo che ci sono a $\pm\infty$ due asintoti orizzontali. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to0^-} \arctan\left(\frac{2+e^x}{e^x-1}\right) = -\pi/2,$$

$$\lim_{x\to0^+} \arctan\left(\frac{2+e^x}{e^x-1}\right) = \pi/2.$$

La funzione non si può quindi prolungare per continuità in 0 poichè il limite sinistro e destro non coincidono.

(c) La funzione dove è definita è continua e derivabile. Poichè

$$D\frac{2+e^x}{e^x-1} = \frac{e^x\cdot(e^x-1)-(2+e^x)\cdot e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{3e^x}{(e^x-1)^2} < 0$$

la funzione $\frac{2+e^x}{e^x-1}$ è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ (e ivi derivabile).
Il conto esplicito della derivata di f è:

$$D\arctan\frac{2+e^x}{e^x-1} = \frac{1}{1+(\frac{2+e^x}{e^x-1})^2}\left(-\frac{3e^x}{(e^x-1)^2}\right) = -\frac{3e^x}{(e^x-1)^2+(2+e^x)^2} \quad (2)$$

$$= -\frac{3\cdot e^x}{2\cdot e^{2x}+2\cdot e^x+5} \quad (3)$$

che risulta negativa per ogni punto del dominio e quindi f è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ (e ivi derivabile).

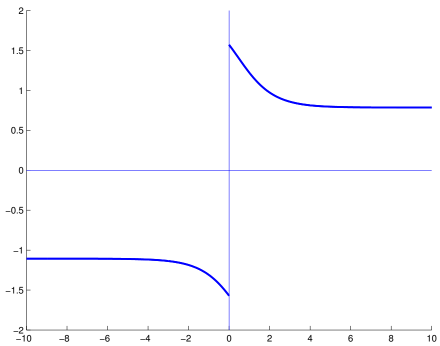

Figura 2: Grafico di f in $[-10, 10]$.

Alternativamente, poichè la funzione arctan è crescente e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, deduciamo, per la composizione di funzioni monotone, che f è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ (e ivi derivabile).

Inoltre poichè arctan è crescente, la funzione f ha massimo o minimo dove ha massimo o minimo il suo argomento $\frac{e^x+2}{e^x-1}$. Poichè $\frac{e^x+2}{e^x-1}$ è sempre decrescente nel dominio non ha massimi e minimi.

Con facili conti, la derivata seconda di f è

$$f''(x) \quad = \quad \frac{3e^x \cdot (2e^{2x} - 5)}{(2e^{2x} + 2e^x + 5)^2} \tag{4}$$

e $2e^{2x} - 5 > 0$ se e solo se $x > \frac{\log(5/2)}{2} \approx 0.4581$.

La funzione quindi cambia concavità in $x = -\frac{\log(5/2)}{2}$, passando da concava a convessa.

(d) La funzione ha il grafico in figura.

Esercizio 2 (8 punti)
(a) Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - \sin(x^2) + x^6}{x^\alpha + x^6}$$

per ogni valore del parametro $\alpha > 0$ reale.
(b) Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ reale affinché la funzione $f(x)$ sia continua in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-\sin(x^2)+x^6}{x^\alpha+x^6} & x > 0, \\ \log(1+2x^2) + x & x \leq 0, \end{cases}$$

Svolgimento

(a) Da $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ in un intorno di 0, deduciamo che posto $t = x^2$ il numeratore va come

$$x^2 - (x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)) + x^6 \sim \frac{7}{6}x^6.$$

- Se $\alpha \in (0, 6)$, allora il denominatore va come x^α e quindi il limite vale

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{7}{6}x^6}{x^\alpha} = 0.$$

- Se $\alpha = 6$ allora il denominatore è $2x^6$ e quindi il limite vale

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{7}{6}x^6}{2x^6} = 7/12.$$

- Se $\alpha > 6$ allora il denominatore va come x^6 e quindi il limite vale

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{7}{6}x^6}{x^6} = 7/6.$$

(b) Dal risultato precedente, ed essendo
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$
deduciamo che la funzione è continua per $\alpha \in (0,6)$.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale definito
$$\int_1^2 \frac{1}{x(\log^2 x + 4\log x + 5)}dx.$$

FACOLTATIVO: Studiare al variare di $\alpha > 0$ reale, la convergenza dell'integrale $\int_1^{+\infty} \sin(\frac{1}{x^\alpha})\frac{1}{x^2+4x+5}dx$.

Svolgimento

Calcoliamo per prima cosa l'integrale indefinito. Posto $t = \log(x)$, da $dt = \frac{1}{x}dx$ abbiamo che
$$I := \int \frac{1}{x(\log^2 x + 4\log x + 5)}dx = \int \frac{1}{t^2+4t+5}dt$$
Poiche l'equazione $t^2 + 4t + 5 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, procediamo con la tecnica del completamento dei quadrati. Osserviamo che
$$t^2 + 4t + 5 = t^2 + 4t + 4 - 4 + 5 = (t+2)^2 + 1$$
e quindi, per $s = (t + 2)$, $ds = dt$
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t^2+4t+9}dt = \int \frac{1}{(t+2)^2+1}dt = \int \frac{1}{(s^2+1)}ds \\ &= \arctan(s) + c = \arctan((t+2)) + c = \arctan((\log(x)+2)) + c. \end{aligned} \tag{5}$$
Per il teorema fondamentale del calcolo
$$\int_1^2 \frac{1}{x(\log^2 x + 4\log x + 5)}dx = \arctan(\log(2)+2) - \arctan(\log(1)+2) = \arctan(\log(2)+2) - \arctan(2).$$

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right).$$

Svolgimento

- Poichè l'argomento $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)$ è positivo, decrescente e infinitesimo, la serie converge per il Criterio di Leibniz.
- La serie è assolutamente convergente se converge
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\log\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{2\cdot 1+3}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty}\log\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)$$
e quindi se converge
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right).$$
Poichè $\frac{1}{2n+3} \sim \frac{1}{2n}$ è infinitesimo e $\log(1+x) \sim x$, il comportamento della serie è uguale a quello di
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$
e quindi la serie diverge.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

4 febbraio 2015

TEMA 3

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;
(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;
(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f;
(d) disegnare un grafico qualitativo di f.
FACOLTATIVO:
i) Calcolare i limiti di f' se significativi;
ii) Calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento

(a) L'unico punto che non appartiene al dominio è dove si annulla $e^x - 1$, cioè $x = 0$. Quindi il dominio è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Da

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}\right) = \arctan\left(\frac{e^x+1}{-e^x+1}\right) = \arctan\left(-\frac{e^x+1}{1-e^x}\right) = -f(x)$$

la funzione è dispari ma non periodica. Poichè $\arctan(t) \geq 0$ se e solo se $t \geq 0$, deduciamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se $\frac{e^x+1}{e^x-1} \geq 0$ e quindi $x \geq 0$.

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$ e $x = 0$. Da

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) = \arctan(1) = \pi/4,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) = \arctan(-1) \approx -7.8540,$$

deduciamo che ci sono a $\pm\infty$ due asintoti orizzontali. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to0^-} \arctan\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) = -\pi/2,$$

$$\lim_{x\to0^+} \arctan\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) = \pi/2.$$

La funzione non si può quindi prolungare per continuità in 0 poichè il limite sinistro e destro non coincidono.

(c) La funzione dove è definita è continua e derivabile. Poichè

$$D\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{e^x\cdot(e^x-1)-(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{2e^x}{(e^x-1)^2} < 0,$$

la funzione $\frac{e^x+1}{e^x-1}$ è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ (e ivi derivabile).

Il conto esplicito della derivata di f è, dopo qualche calcolo,

$$D\arctan\frac{e^x+1}{e^x-1} = -\frac{e^x}{e^{2x}+1} \tag{6}$$

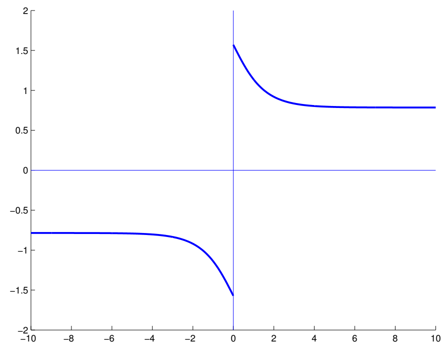

Figura 3: Grafico di f in $[-10, 10]$.

che risulta negativa per ogni punto del dominio e quindi f è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ (e ivi derivabile).

Alternativamente, poichè la funzione arctan è crescente e derivabile in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, deduciamo, per la composizione di funzioni monotone, che f è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ (e ivi derivabile).

Inoltre poichè arctan è crescente, la funzione f ha massimo o minimo dove ha massimo o minimo il suo argomento $\frac{e^x+1}{e^x-1}$. Poichè $\frac{e^x+1}{e^x-1}$ è sempre decrescente nel dominio e non è definita in $x = 0$, non ha massimi e minimi.

Con facili conti, la derivata seconda di f è

$$f''(x) \quad = \quad \frac{e^x \cdot (e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2} \tag{7}$$

e $e^{2x} - 1 > 0$ se e solo se $x > 0$.

La funzione quindi cambia concavità in $x = 0$, passando da concava a convessa.

(d) La funzione ha il grafico in figura.

Esercizio 2 (8 punti)
(a) Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^4} - 1 + 2x^4}{x^4 + x^\alpha}$$

per ogni valore del parametro $\alpha > 0$ reale.
(b) Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ reale affinché la funzione $f(x)$ sia continua in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^4}-1+2x^4}{x^4+x^\alpha} & x > 0, \\ \sin(x^2) + x^3 & x \leq 0, \end{cases}$$

Svolgimento

(a) Da $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ in un intorno di 0, deduciamo che posto $t = x^4$ il numeratore va come

$$(1 + x^4 + o(x^4)) - 1 + 2x^4 \sim 3x^4.$$

- Se $\alpha \in (0, 4)$, allora il denominatore va come x^α e quindi il limite vale

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3x^4}{x^\alpha}$$

e quindi vale 0 per $\alpha \in (0, 4)$.

- Se $\alpha = 4$ allora il denominatore è $2x^4$ e quindi il limite vale

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3x^3}{2x^4} = \frac{3}{2}.$$

- Se $\alpha > 4$ allora il denominatore va come x^4 e quindi il limite vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x^4}{x^4} = 3.$$

(b) Dal risultato precedente, ed essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

deduciamo che la funzione è continua per $\alpha \in (0,4)$.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 5} dx.$$

FACOLTATIVO: Studiare al variare di $\alpha > 0$ reale, la convergenza dell'integrale $\int_1^{+\infty} \sin(\frac{1}{x^\alpha})\frac{1}{x^2+2x+5}dx$.

Svolgimento

Calcoliamo per prima cosa l'integrale indefinito. Posto $t = e^x$, da $dt = e^x dx$ abbiamo che

$$I := \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 5} dx = \int \frac{1}{t^2 + 2t + 5} dt$$

Poiche l'equazione $t^2 + 2t + 5 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, procediamo con la tecnica del completamento dei quadrati. Osserviamo che

$$t^2 + 2t + 5 = t^2 + 2t + 1 - 1 + 5 = \Big(t+1\Big)^2 + 4$$

e quindi, per $s = (t+1)/2$, $ds = (1/2)dt$,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t^2 + 2t + 5} dt = (1/4) \int \frac{1}{((t+1)/2)^2 + 1} dt = (1/2) \int \frac{1}{s^2 + 1} ds \\ &= \frac{1}{2} \arctan(s) + c = \frac{1}{2} \arctan((t+1)/2) + c = \frac{1}{2} \arctan((e^x+1)/2) + c \end{aligned} \tag{8}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 4} dx &= \frac{1}{2}\Big(\arctan((e^1+1)/2) - \arctan((e^0+1)/2)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\arctan((e+1)/2) - \arctan(1)\Big) = \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{e+1}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Esercizio 4 (8 punti)

Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{2n+4}\right).$$

Svolgimento

- Poichè l'argomento $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{2n+4}\right)$ è positivo, decrescente e infinitesimo, la serie converge per il Criterio di Leibniz.
- La serie è assolutamente convergente se converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{2n+4}\right).$$

Poichè $\frac{1}{2n+4} \sim \frac{1}{2n+2}$ è infinitesimo e $\log(1+x) \sim x$, il comportamento della serie è uguale a quello di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

e quindi la serie diverge.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

4 febbraio 2015

TEMA 4

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{3+e^x}{e^x-1}\right)$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;
(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;
(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f;
(d) disegnare un grafico qualitativo di f.
FACOLTATIVO:
i) Calcolare i limiti di f' se significativi;
ii) Calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento

(a) L'unico punto che non appartiene al dominio è dove si annulla $e^x - 1$, cioè $x = 0$. Quindi il dominio è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Non ci sono simmetrie o periodictà . Poichè $\arctan(t) \geq 0$ se e solo se $t \geq 0$, deduciamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se $\frac{e^x+3}{e^x-1} \geq 0$ e quindi $x \geq 0$.

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$ e $x = 0$. Da

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{e^x+3}{e^x-1}\right) = \arctan(1) = \pi/4,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{e^x+3}{e^x-1}\right) = \arctan(-3) \approx -1.2490,$$

deduciamo che ci sono a $\pm\infty$ due asintoti orizzontali. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{e^x+3}{e^x-1}\right) = -\pi/2,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{e^x+3}{e^x-1}\right) = \pi/2.$$

La funzione non si può quindi prolungare per continuità in 0 poichè il limite sinistro e destro non coincidono.

(c) La funzione dove è definita è continua e derivabile Poichè

$$D\frac{e^x+3}{e^x-1} = \frac{e^x \cdot (e^x-1) - (e^x+3) \cdot e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{4e^x}{(e^x-1)^2} < 0,$$

la funzione $\frac{3+e^x}{e^x-1}$ è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ (e ivi derivabile).
Il conto esplicito della derivata di f è, dopo qualche calcolo,

$$D\arctan\frac{e^x+3}{e^x-1} \quad = \quad -\frac{2 \cdot e^x}{e^{2x} + 2 \cdot e^x + 5}. \tag{10}$$

che risulta negativa per ogni punto del dominio e quindi f è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ (e ivi derivabile).

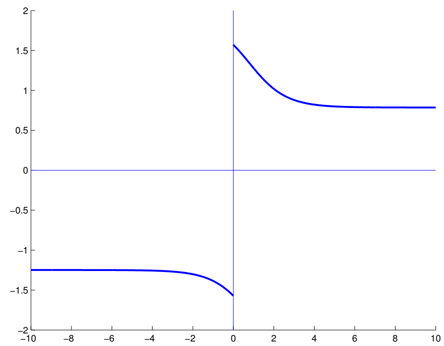

Figura 4: Grafico di f in $[-10,10]$.

Alternativamente, essendo la funzione arctan è crescente e derivabile in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, deduciamo, per la composizione di funzioni monotone, che f è decrescente in $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ (e ivi derivabile).

Inoltre, siccome arctan è crescente, la funzione f ha massimo o minimo dove ha massimo o minimo il suo argomento $\frac{e^x+3}{e^x-1}$. Poichè $\frac{e^x+3}{e^x-1}$ è sempre decrescente nel dominio ed non è definita in 0, non ha massimi e minimi.

Con facili conti, la derivata seconda di f è

$$f''(x) \quad = \quad \frac{2\cdot e^x\cdot(e^{2x}-5)}{(e^{2x}+2\cdot e^x+5)^2} \tag{11}$$

e $e^{2x}-5>0$ se e solo se $x>\frac{\log(5)}{2}\approx 0.8047$.

La funzione quindi cambia concavità in $x=-\frac{\log(5)}{2}$, passando da concava a convessa.

(d) La funzione ha il grafico in figura.

Esercizio 2 (8 punti)
(a) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x^2)-x^2+2x^4}{x^\alpha+x^4}$$

per ogni valore del parametro $\alpha>0$ reale.
(b) Determinare i valori del parametro $\alpha>0$ reale affinché la funzione $f(x)$ sia continua in $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\log(1+x^2)-x^2+2x^4}{x^\alpha+x^4} & x>0,\\ \sin(x^2)+5x & x\le 0,\end{cases}$$

Svolgimento

(a) Da $\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$ in un intorno di 0, deduciamo che posto $t=x^2$ il numeratore va come

$$(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4))-x^2+2x^4\sim\frac{3}{2}x^4.$$

- Se $\alpha\in(0,4)$, allora il denominatore va come x^α e quindi il limite vale

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}x^4}{x^\alpha}$$

  e quindi vale 0 per $\alpha\in(0,4)$.

- Se $\alpha=4$ allora il denominatore è $2x^4$ e quindi il limite vale

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}x^4}{2x^4}=3/4.$$

- Se $\alpha > 4$ allora il denominatore va come x^4 e quindi il limite vale

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^4}{x^4} = 3/2.$$

(b) Dal risultato precedente, ed essendo

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

deduciamo che la funzione è continua per $\alpha \in (0, 4)$.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x(\log^2 x + 2\log x + 3)} dx.$$

FACOLTATIVO: Studiare al variare di $\alpha > 0$ reale, la convergenza dell'integrale $\int_1^{+\infty} \sin(\frac{1}{x^\alpha}) \frac{1}{x^2+2x+3} dx$.

Svolgimento

Calcoliamo per prima cosa l'integrale indefinito. Posto $t = \log(x)$, da $dt = \frac{1}{x}dx$ abbiamo che

$$I := \int \frac{1}{x(\log^2 x + 2\log x + 3)} dx = \int \frac{1}{t^2 + 2t + 3} dt$$

Poiche l'equazione $t^2 + 2t + 3 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, procediamo con la tecnica del completamento dei quadrati. Osserviamo che

$$t^2 + 2t + 3 = t^2 + 2t + 1 - 1 + 3 = (t + 1)^2 + 2$$

e quindi, per $s = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + 1)$, $ds = \frac{1}{\sqrt{2}}dt$, $dt = \sqrt{2}ds$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t^2 + 2t + 3} dt = \int \frac{1}{(t + 1)^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}}(t + 1))^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{2}}{(s^2 + 1)} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(s) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}(t + 1)) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}(\log(x) + 1)) + c \end{aligned} \tag{12}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x(\log^2 x + 2\log x + 3)} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}(\log(2) + 1)) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}(\log(1) + 1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}(\log(2) + 1)) - \arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}) \right) \end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)

Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{\sqrt{1 + 3n^2}}.$$

Svolgimento

- Poichè l'argomento $a_n = \tan \frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}$ è positivo, decrescente e infinitesimo, la serie converge per il Criterio di Leibniz.

- La serie è assolutamente convergente se converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tan \frac{1}{\sqrt{3n^2 + 1}}.$$

Poichè $\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}} \sim \sqrt{3n^2 + 3}$ è infinitesimo e $\tan(x) \sim x$, il comportamento della serie è uguale a quello di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2 + 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}})$$

e cioè a quello di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Essendo

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n},$$

basta vedere quale sia il comportamento di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Di conseguenza la serie iniziale diverge, perchè tale è il comportamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.