

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA
Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015
Corsi di laurea in Scienze Statistiche

9 luglio 2015

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = (\cos x)^2 + 2|\sin x|.$$

- (a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f ;
- (b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f , eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;
- (c) studiare la continuità e la derivabilità di f , studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f , calcolare i limiti di f' se significativi;
- (d) (facoltativo) calcolare f'' e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.
- (e) disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento

- (a) – Dominio. Si vede facilmente che è \mathbb{R} .
– Simmetrie. Si vede facilmente che la funzione f è pari perchè somma di funzioni pari.
– Periodicità . Si ha che $f(x + \pi) = f(x)$, quindi f è periodica con periodo π .
– Segno. La funzione è sempre positiva, poichè somma di funzioni positive.
- (b) – Limiti agli estremi. Non esistono i limiti a $\pm\infty$, per effetto del fatto che la funzione è periodica e non costante.
– Asintoti. Poichè non esistono i limiti a $\pm\infty$, non ci sono asintoti orizzontali.
– Prolungamento per continuità . La funzione è continua (somma e composizione di funzioni continue) e quindi non necessita prolungarla per continuità .
- (c) – Continuità . La funzione è continua (somma e composizione di funzioni continue).
– Derivabilità . Studiamo la derivabilità in $\Omega = (0, \pi)$ e poi in $x = 0$. Altrove l'analisi è la stessa vista la periodicità della funzione. Poichè in Ω si ha che

$$f(x) = (\cos x)^2 + 2|\sin x| = (\cos x)^2 + 2\sin x$$

abbiamo che

$$f'(x) = -2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x) = 2\cos(x)(1 - \sin(x)).$$

Di conseguenza f è derivabile in tutti i punti del tipo $x + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, $x \in (0, \pi)$.
 Notiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2,$$

e che per la periodicità di f

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = -2$$

e quindi la funzione f non è derivabile in $x = 0$ e di conseguenza, vista la periodicità, non è derivabile in tutti i punti del tipo $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

- Monotonia, massimi e minimi. Studiamo la monotonia in $\Omega = (0, \pi)$. Per gli intervalli $\Omega_k = (k\pi, (k+1)\pi)$ l'analisi è uguale. Da

$$f'(x) = 2 \cos(x)(1 - \sin(x))$$

essendo $1 - \sin(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$, deduciamo che il segno di $f'(x)$ è lo stesso di $\cos(x)$. Quindi la funzione è crescente in $(0, \pi/2)$, e decrescente in $(\pi/2, \pi)$. Conseguentemente $0, \pi$ sono minimi (si noti che $f(0) = f(\pi)$) e $\pi/2$ è massimo.

- (d) – Calcolo f'' . Studiamo la derivata seconda in $\Omega = (0, \pi)$. Ricordiamo che non esiste in 0 come pure nei punti $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ poichè ivi la funzione non è derivabile. Essendo in Ω

$$f'(x) = -2 \sin(x) \cos(x) + 2 \cos(x)$$

ricaviamo che

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2 \cos^2(x) + 2 \sin^2(x) - 2 \sin(x) \\ &= -2(1 - \sin^2(x)) + 2 \sin^2(x) - 2 \sin(x) \\ &= 4 \sin^2(x) - 2 \sin(x) - 2. \end{aligned} \tag{1}$$

- Regioni concavità o convessità. Studiamo il segno di f'' . Posto $t = \sin(x)$, $4 \sin^2(x) - 2 \sin(x) - 2 > 0$ se e solo se $4t^2 - 2t - 2 > 0$ ovvero $2t^2 - t - 1 > 0$. Poichè $2t^2 - t - 1 = 0$ per $t = -1/2$ e $t = 1$, $2t^2 - t - 1 > 0$ per $t \in (-\infty, -1/2) \cup (1, +\infty)$, $2t^2 - t - 1 \leq 0$ altrove. Essendo $t = \sin(x)$, $x \in (0, \pi)$, risulta $t = \sin(x) \in (0, 1)$ per $x \in (0, \pi)$, la derivata seconda è sempre negativa e quindi la funzione concava.

- (e) Dai vari punti discussi, otteniamo il grafico in figura (da prolungare per periodicità in \mathbb{R}).

Esercizio 2 (8 punti)

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \log(x+1)}{2 \sin(x^2)} & x > 0 \\ ax + b & x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Dire per quali valori dei parametri a e b la funzione è continua in $x = 0$;
- b) dire per quali valori dei parametri a e b la funzione è derivabile in $x = 0$; (suggerimento scrivere $f'_+(0)$ come $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$).

Svolgimento

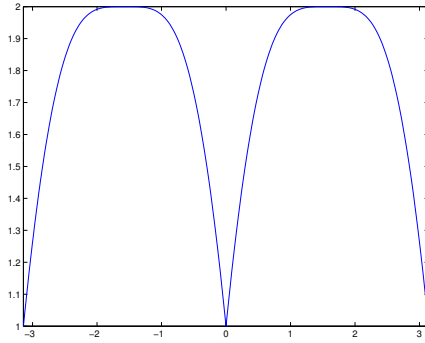


Figura 1: Grafico di f in $(-5, 5)$.

- (a) Osserviamo che da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log(x+1)}{2 \sin(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \log(x+1)}{2x \sin(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin(x^2)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x+1)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x+1)}{x} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} ax + b = b \quad (3)$$

affinchè la funzione f sia continua in 0,

$$b = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2},$$

necessita cioè che sia $b = 1/2$.

- (b) Studiamo la derivata in 0, nel caso $b = 1/2$ (per altri b non ha senso, perchè la funzione non è nemmeno continua). Non è difficile vedere che la derivata prima, da sinistra, in 0, vale a , cioè

$$f'_-(0) = a.$$

Per quanto riguarda la destra in $x = 0$

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h \log(h+1)}{2 \sin(h^2)} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h \log(h+1)}{2 \sin(h^2)} - \frac{1}{2}}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\frac{h \log(h+1) - \sin(h^2)}{\sin(h^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h^3} \left(\frac{h \log(h+1) - \sin(h^2)}{\sin(h^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \log(h+1) - \sin(h^2)}{h^3} \end{aligned}$$

Poichè

$$\sin(h) = h - h^3/3 + o(h^3)$$

e

$$\log(h+1) = h - h^2/2 + o(h^2)$$

il numeratore è tale che

$$h \log(h+1) - \sin(h^2) \sim h(h - h^2/2 + o(h^2)) - (h^2 - h^6/3 + o(h^6)) = -h^3/2 + o(h^3)$$

deduciamo che

$$\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \log(h+1) - \sin(h^2)}{h^3} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^3/2 + o(h^3)}{h^3} = -\frac{1}{4} \quad (4)$$

Quindi affinché la funzione sia derivabile in 0 necessita siano $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Calcolare tutte le primitive di $f(x) = 3x e^{-x^2}$.

(b) Dopo aver calcolato

$$\int_0^{+\infty} 3x e^{-x^2} dx,$$

dire se l'integrale converge o no.

Svolgimento

(a) Per sostituzione. Posto $t = x^2$, $dt = 2x dx$ e quindi, per C arbitraria,

$$\begin{aligned} I &= \int 3x e^{-x^2} dx = \frac{3}{2} \int e^{-t} dt \\ &= -\frac{3}{2} e^{-t} + C = -\frac{3}{2} e^{-x^2} + C. \end{aligned} \quad (5)$$

(b) Ricordiamo che dal teorema fondamentale del calcolo, e dalla definizione di integrale improprio

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} 3x e^{-x^2} dx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{2} e^{-x^2} - \left(-\frac{3}{2} e^{-0^2} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{2} e^{-x^2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Esercizio 4 (8 punti)

a) Scrivere il gradiente di f , trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = \frac{(x+y)^3}{3}$ e disegnarli sul piano cartesiano. (Nonè richiesto lo studio della natura dei punti critici)

b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y)$ soggetta al vincolo $g(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = 0$.

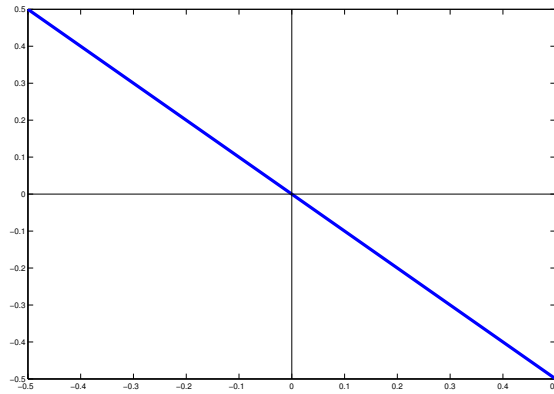


Figura 2: Grafico dei punti estremali (in blue).

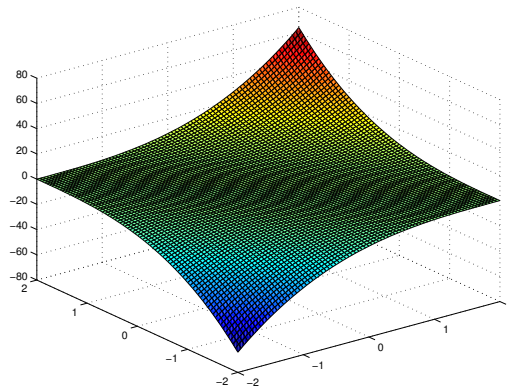


Figura 3: Grafico della funzione f nel quadrato $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

(a) Poichè il gradiente di f è

$$\text{grad}f(x, y) = ((x + y)^2, (x + y)^2)$$

abbiamo che si annulla nei punti (x, y) per cui $x + y = 0$, cioè $y = -x$ (bisettrice secondo e quarto quadrante). I punti su tale retta sono tutti e soli i punti critici.

Seppure non richiesto, si vede facilmente che la funzione si annulla nel generico punto critico e che in qualsiasi intorno esistono valori della funzione che sono negativi ed altri che sono positivi (si considerino rette $x + y + c = 0$, con $c \in \mathbb{R}$ arbitrariamente piccolo). Quindi sono tutti punti di sella.

(b) Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Da

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^3}{3}$$

$$g(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2$$

definiamo

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = \frac{(x+y)^3}{3} + \lambda \left(\frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 \right).$$

I punti critici vincolati (x, y) verificano, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} (x+y)^2 + \lambda(x+y) = 0 \\ (x+y)^2 + \lambda(x+2y) = 0 \\ \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+\lambda) = 0 \\ (x+y)^2 + \lambda(x+2y) = 0 \\ \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione o è $x+y=0$ oppure $x+y+\lambda=0$.

(i) Se $x+y=0$, allora $x=-y$. La terza equazione diventa così

$$\frac{y^2}{2} - y^2 + y^2 - 2 = 0$$

da cui

$$y^2 = 4$$

cioè $y = \pm 2$. Quindi $P_1 = (-2, 2)$, $P_2 = (2, -2)$ sono punti candidati a essere di massimo o minimo assoluto.

(ii) Se $x+y+\lambda=0$, necessariamente $x+y=-\lambda$ o equivalentemente $y=-x-\lambda$. Osserviamo dalla seconda equazione che

$$\begin{aligned} 0 &= (x+y)^2 + \lambda(x+2y) = \lambda^2 + \lambda(x+2(-x-\lambda)) \\ &= \lambda(\lambda-x-2\lambda) = \lambda(-x-\lambda) = -\lambda(x+\lambda) \end{aligned} \quad (7)$$

e quindi o $\lambda=0$ oppure $x=-\lambda$. Se $\lambda=0$ si vede subito che per verificare la prima equazione dev'essere $x+y=0$ e quindi ricadiamo nel caso discusso in [(i)]. Altrimenti, se $x=-\lambda$, da $x+y+\lambda=0$ ricaviamo $y=0$. La terza equazione diventa così

$$0 = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = \frac{x^2}{2} - 2$$

cioè $x = \pm 2$. Quindi $P_3 = (-2, 0)$, $P_4 = (2, 0)$ sono punti candidati a essere di massimo o minimo assoluto.

Essendo

$$\begin{aligned}f(-2, 2) &= 0 \\f(2, -2) &= 0 \\f(-2, 0) &= -8/3 \\f(2, 0) &= 8/3\end{aligned}\tag{8}$$

deduciamo che $P_3 = (-2, 0)$ è un minimo globale vincolato a $g(x, y) = 0$ e $P_4 = (2, 0)$ è un massimo globale vincolato a $g(x, y) = 0$.

Tempo: IAM due ore, IAM1 e 2 un'ora. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

9 luglio 2015

TEMA 2

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = (\cos x)^2 + 2|\sin x|.$$

- Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f ;
- determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f , eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;
- studiare la continuità e la derivabilità di f , studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f , calcolare i limiti di f' se significativi;
- (facoltativo) calcolare f'' e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.
- disegnare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 2 (8 punti)

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \log(x+1)}{2 \sin(x^2)} & x > 0 \\ ax + b & x \leq 0 \end{cases}$$

- Dire per quali valori dei parametri a e b la funzione è continua in $x = 0$;
- dire per quali valori dei parametri a e b la funzione è derivabile in $x = 0$; (suggerimento scrivere $f'_+(0)$ come $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$).

Esercizio 3 (8 punti)

- Calcolare tutte le primitive di $f(x) = 3x e^{-x^2}$.
- Dopo aver calcolato

$$\int_0^{+\infty} 3x e^{-x^2} dx,$$

dire se l'integrale converge o no.

Esercizio 4 (8 punti)

- Scrivere il gradiente di f , trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = \frac{(x+y)^3}{3}$ e disegnarli sul piano cartesiano. (Non è richiesto lo studio della natura dei punti critici)
- Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y)$ soggetta al vincolo $g(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2 = 0$.

Tempo: IAM due ore, IAM1 e 2 un'ora. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.