ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

16 settembre 2015

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{\log x - 1}{\log x}}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento.

(a) Il dominio consiste di tutti quei valori x per cui $\frac{\log x - 1}{\log x} \geq 0$ e $\log(x) \neq 0$, $x > 0$. Essendo $\log(x) - 1 \geq 0$ se e solo se $x \geq e$ e $\log(x) > 0$ se e solo se $x > 1$, non è difficile vedere che il dominio è

$$\Omega = (0, 1) \cup [e, +\infty).$$

La funzione non ha simmetrie o periodicitá.

(b) Nel dominio la funzione è continua. Ne studiamo gli asintoti, osservando che

$$f(x) = \sqrt{\frac{\log x - 1}{\log x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\log x}}.$$

Non è difficile determinare che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to e^+} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,$$

e quindi si ha solo un asintoto orizzontale a $+\infty$.

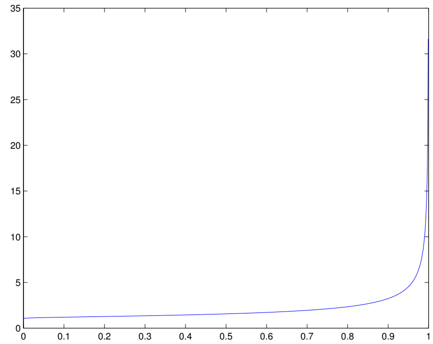

Figura 1: Grafico di f in $(0, 1)$.

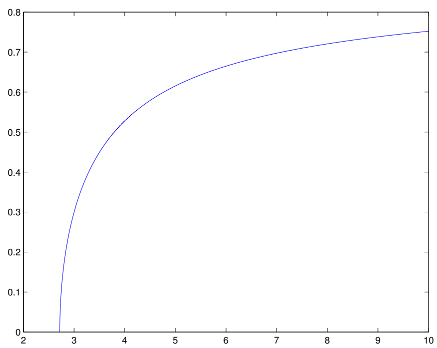

Figura 2: Grafico di f in $[e, 10]$.

(c) La derivata è

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\log(x)}\right)^{-1/2} \frac{1}{x\log^2(x)}$$

e quindi la derivata sempre positiva, implicando che la funzione è sempre crescente in Ω. Questo risultato si poteva ottenere anche dal fatto che $1 - 1/\log(x)$ è sempre crescente essendolo $\log(x)$ e quindi lo è $\sqrt{1 - 1/\log(x)}$.

Per quanto riguarda gli *attacchi* della derivata in $x = 0$ e $x = e$,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to e^+} f'(x) = +\infty.$$

(d) La funzione è come da grafico in figura.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)\arctan(x^5)}{\log(1 + x^\alpha)(e^x - 1)^3}$$

Svolgimento.

Dalle espansioni di Taylor in 0

$$\sin(x) = x + o(x) \Rightarrow \sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\arctan(x) = x + o(x) \Rightarrow \arctan(x^5) = x^5 + o(x^5)$$

$$\log(1+x) = x + o(x) \Rightarrow \log(1+x^\alpha) = x^\alpha + o(x^\alpha)$$

$$\exp(x) - 1 = x + o(x) \Rightarrow (\exp(x)-1)^3 = x^3 + o(x^3)$$

deduciamo che

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)\arctan(x^5)}{\log(1+x^\alpha)(e^x-1)^3} && (1) \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^7 + o(x^7)}{x^{3+\alpha} + o(x^{3+\alpha})} = \lim_{x\to 0^+} x^{4-\alpha} && (2) \end{aligned}$$

da cui per $0 < \alpha < 4$ si ha $L = 0$, per $\alpha > 4$ si ha $L = +\infty$, per $\alpha = 4$ si ha $L = 1$.

Esercizio 3 (8 punti)

Calcolare

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 4 - 4\cos x} dx.$$

Svolgimento.

Posto $y = \cos(x)$, da $dy = -\sin(x)$, abbiamo

$$\begin{aligned} I(f) &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 4 - 4\cos x} dx \\ &= -\int \frac{1}{y^2 - 4y + 4} dy = -\int \frac{1}{(y-2)^2} dy \end{aligned}$$

Posto $t = y - 2$, da $dt = dy$,

$$\begin{aligned} I(f) &= -\int \frac{1}{(y-2)^2} dy = -\int \frac{1}{t^2} dt \\ &= \frac{1}{t} + c = \frac{1}{y-2} + c = \frac{1}{\cos(x) - 2} + c \end{aligned}$$

e dal teorema fondamentale del calcolo

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 4 - 4\cos x} dx \\ &= \frac{1}{\cos(\pi) - 2} - \frac{1}{\cos(0) - 2} = (-1/3) + 1 = 2/3. \end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(1/n^2) - \tan(1/n^2)}{n^\alpha}$$

converge.

Svolgimento.

Osserviamo che se $n \to +\infty$ allora $1/n^2 \to 0$. Dalla espansione di Taylor,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

ricaviamo che

$$\sin(x) - \tan(x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

e quindi per $n \to +\infty$

$$\sin(\frac{1}{n^2}) - \tan(\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{(\frac{1}{n^2})^3}{2} = (-1/2)\frac{1}{n^6}.$$

per cui

$$\frac{\sin(1/n^2) - \tan(1/n^2)}{n^\alpha} \sim \frac{(-1/2)\frac{1}{n^6}}{n^\alpha} = (-1/2)\frac{1}{n^{\alpha+6}}.$$

Quindi, per il teorema di convergenza asintotica delle serie, converge per $\alpha + 6 > 1$, cioè $\alpha > -5$, altrimenti diverge.

Tempo: IAM due ore, IAM1 e 2 un'ora. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

16 settembre 2015

TEMA 2

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{\log x - 1}{\log x}}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2) \arctan(x^5)}{\log(1 + x^\alpha)(e^x - 1)^3}$$

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 4 - 4\cos x} dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(1/n^2) - \tan(1/n^2)}{n^\alpha}$$

converge.

Tempo: IAM due ore, IAM1 e 2 un'ora. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.