ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015
Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2015

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = |x + 2|e^{3x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

FACOLTATIVO calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento

(a) La funzione f è il prodotto di due funzioni continue e non negative su $\mathbb{R}$ cioè $g_1(x) = |x + 2|$, $g_2(x) = e^{3x}$ e quindi f è continua e non negativa. Siccome $g_1(-2) = 0$, $g_1(x) > 0$ in $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ e $g_2(x) > 0$ per $x \in \mathbb{R}$ deduciamo che l'unico punto in cui $f(x) = 0$ è $x = -2$. La funzione non presenta simmetrie o periodicità. Notiamo che

$$f(x) = \begin{cases} \left(x + 2\right)e^{3x} & x \geq -2 \\ -\left(x + 2\right)e^{3x} & x < -2 \end{cases}$$

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$.

- Da
$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} |x + 2|e^{3x} &= \lim_{x\to-\infty} -\left(x + 2\right)e^{3x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x + 2}{e^{-3x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{-3e^{-3x}} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$
deduciamo che $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$.
- Da
$$\lim_{x\to+\infty} |x + 2|e^{3x} = +\infty,$$
deduciamo che non vi è un asintoto orizzontale a $+\infty$.

Osserviamo inoltre che

- essendoci un asintoto orizzontale a $-\infty$, non ha senso studiare la presenza di un asintoto obliquo;
- da
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x + 2)e^{3x}}{x} = +\infty$$
deduciamo che f non possiede un asintoto obliquo o $+\infty$.

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ e quindi non ha senso porsi il problema se sia prolungabile per continuità in alcuni punti.

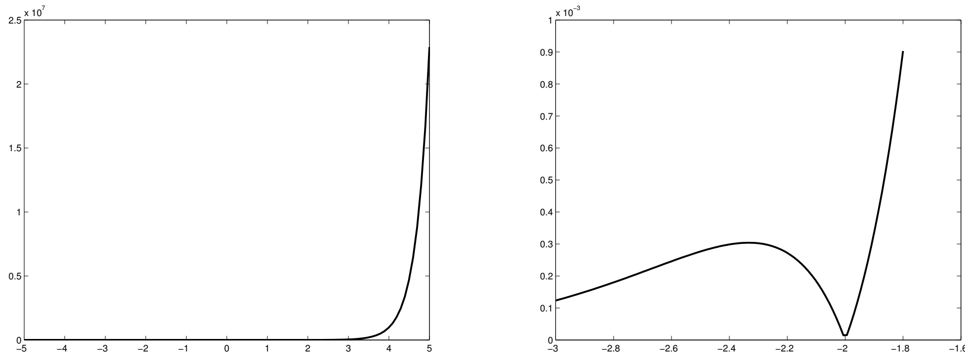

Figura 1: Grafico di f in $[-5, +5]$ e in $[-3, -1.8]$.

(c) La funzione f è derivabile ovunque eccetto in $x = -2$. Osserviamo che

- se $x > -2$ allora $f(x) = (x+2)e^{3x}$ e quindi
$$f'(x) = e^{3x} + 3(x+2)e^{3x} = (3x+7)e^{3x};$$
di conseguenza, da $3x + 7 > 0$ per $x \in (-2, +\infty)$ deduciamo che la funzione è monotona crescente in $(-2, +\infty)$;
- se $x < -2$ allora $f(x) = -(x+2)e^{3x}$ e quindi
$$f'(x) = -e^{3x} - 3(x+2)e^{3x} = -(3x+7)e^{3x};$$
di conseguenza essendo $-(3x+7) > 0$ per $x \in (-\infty, -(7/3))$, $-(3x+7) \leq 0$ per $x \in (-(7/3), -2)$, $e^{3x} > 0$ per $x \in \mathbb{R}$, la funzione è monotona crescente in $(-\infty, -(7/3))$, monotona decrescente in $(-(7/3), -2)$ e ha un minimo in $x_{\text{min}} = -7/3$.

Osserviamo che
$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = -\lim_{x \to -2^-} (3x+7)e^{3x} = -e^{-6},$$
mentre
$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = \lim_{x \to -2^+} (3x+7)e^{3x} = e^{-6}.$$

(d) La funzione ha il grafico in figura.

(Facoltativo) La derivata seconda di f è facilmente
$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 3(3x+8)e^{3x}, & x > -2 \\ -3(3x+8)e^{3x}, & x < -2. \end{cases}$$

Da questo abbiamo facilmente che

- la funzione è convessa in $(-\infty, -8/3)$, in quanto $f^{(2)}(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -8/3)$;
- la funzione è concava in $(-8/3, -2)$, in quanto $f^{(2)}(x) < 0$ per $x \in (-8/3, -2)$;
- la funzione è convessa in $(-2, +\infty)$, in quanto $f^{(2)}(x) \geq 0$ per $(-2, +\infty)$;
- la funzione ha un flesso in $x_1 = -8/3$.

$\sim \circ \sim$

Esercizio 2
Calcolare, al variare del parametro reale $a > 0$,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{10} - 3\sin x + 2e^{ax}}{5^x + e^{3x} - (\log x)^5}.$$
FACOLTATIVO: calcolare il limite anche per $a \leq 0$.

Svolgimento

- Analizziamo il numeratore. Sappiamo che, in virtù della maggior *crescita* dell'esponenziale rispetto alle altre funzioni, il numeratore va come $2e^{ax}$. Lo verifichiamo.
  - Da
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{2e^{ax}} = (1/2) \lim_{x\to+\infty} e^{10\log(x)-ax}$$
  e
  $$\lim_{x\to+\infty} 10\log(x) - ax = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\log(x)}{x} - a\right) = -\infty \tag{2}$$
  deduciamo che
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{2e^{ax}} = 0.$$
  - Essendo $3\sin(x)$ limitata, poichè $1/(2e^{ax}) \to 0$ per $x \to +\infty$, abbiamo che
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\sin(x)}{2e^{ax}} = 0.$$
  - Essendo $3\sin(x)$ limitata, poichè $1/x^{10} \to 0$ per $x \to +\infty$, abbiamo che
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\sin(x)}{x^{10}} = 0.$$

  Quindi, a numeratore, il termine dominante è, indipendentemente da a, $2e^{ax}$.
- Analizziamo il denominatore. A priori, vista la bassa crescita del logaritmo, pensiamo che il termine dominante possa essere uno tra 5^x e e^{3x}. Facciamo le necessarie verifiche.
  - Visto che $\log(5) \approx 1.609437912434100 < 3$,
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{(\log(5))x-3x} = \lim_{x\to+\infty} e^{(\log(5)-3)x} = 0,$$
  ricaviamo che il termine e^{3x} *domina* su 5^x;
  - Osserviamo che se $0 < a < b$ allora, a $+\infty$, b^x domina su a^x, in quanto
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0.$$
  Essendo $e^{3x} = (e^3)^x$ e $5 < e^3$ abbiamo che e^{3x} domina su 5^x.

  Quindi, a denominatore, il termine dominante è e^{3x}.

Così
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10} - 3\sin x + 2e^{ax}}{5^x + e^{3x} - (\log x)^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{ax}}{e^{3x}} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{e^{3x}}.$$
Quindi se $a < 3$ l'integrale vale 0, se $a = 3$ allora vale 2, altrimenti, per $a \in (3, +\infty)$, vale $+\infty$.

FACOLTATIVO. Per quanto riguarda la parte facoltativa, basta notare che in questo caso il numeratore va sempre come x^{10}. Quindi il limite è equivalente a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{e^{3x}}$$
che con una tecnica simile a quella usata in precedenza vale 0.

$\sim \circ \sim$

Esercizio 3
Calcolare una primitiva di
$$f(x) = x^2 \sin(x+1).$$

Svolgimento

Integriamo per parti. Da $\int \sin(x+1)dx = -\cos(x+1)$, $Dx^2 = 2x$, ricaviamo
$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(x+1)dx &= -x^2 \cos(x+1) - \int (2x)\,(-\cos(x+1))dx \\ &= -x^2 \cos(x+1) + 2\int x\,(\cos(x+1))dx\end{aligned}$$

Inoltre da $\int \cos(x+1)dx = \sin(x+1)$, $Dx = 1$, $\int \sin(x+1)dx = -\cos(x+1)$
$$\begin{aligned}\int x \cos(x+1)dx &= x \sin(x+1) - \int 1 \cdot \sin(x+1)dx \\ &= x \sin(x+1) - \int \sin(x+1)dx = x \sin(x+1) + \cos(x+1).\end{aligned}$$

Si conclude così che
$$\int x^2 \sin(x+1)dx = -x^2 \cos(x+1) + 2\int x \cos(x+1)dx = -x^2 \cos(x+1) + 2\Big(x \sin(x+1) + \cos(x+1)\Big) + c.$$

$\sim \circ \sim$

Esercizio 4
a) Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$.
b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = 2x^2+y^2-x$ sull'insieme $A = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$.

Svolgimento

- Osserviamo che
$$\nabla f(x,y) = \Big(4x-1, 2y\Big)$$
e quindi, essendo i punti critici (x^*, y^*) tali che $\nabla f(x^*, y^*) = 0$, il punto critico è $(1/4, 0)$. Inoltre la matrice Hessiana è
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Di conseguenza il punto è un minimo, poichè $(Hf(1/4,0))_{1,1} = 4$ e $\det(Hf(1/4,0)) = 4 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 8$.

- Osserviamo che se (x,y) verifica $x^2 + y^2 = 1$, necessariamente
$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x = x^2 + (x^2+y^2) - x = x^2 - x + 1.$$
Posto $g(x) = x^2-x+1$, notiamo che nel dominio richiesto, il cerchio con centro l'origine e raggio 1, abbiamo che $x \in [-1,1]$ e quindi studiamo i massimi e i minimi della funzione g in $[-1,1]$. Poichè $g'(x) = 2x-1$, studiando il segno di g' deduciamo che la funzione g è monotona decrescente per $x \in [-1, 1/2]$ e crescente in $x = [1/2, 1]$. Quindi $x_1 = 1/2$ è un minimo e $x_{2,3} = \pm 1$ sono massimi locali. Da $g(-1) = 3$, $g(1) = 1$ deduciamo che $x = -1$ è il massimo globale di g. Così, dovendo essere $x^2 + y^2 = 1$, concludiamo che $(-1, 0)$ è il massimo assoluto, mentre $(1/2, \pm\sqrt{3/4})$ sono minimi assoluti.

La funzione ha il grafico in figura. I puntini in rosso evidenziano i minimi, quello in verde descrive il massimo della funzione nel vincolo.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

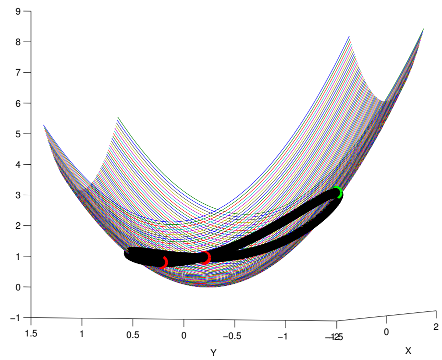

Figura 2: Grafico di f in $[-1.5, +1.5] \times [-1.5, +1.5]$. In nero i valori sul cerchio unitario.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2015

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = |x-1|e^{2x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

FACOLTATIVO calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento

(a) La funzione f è il prodotto di due funzioni continue e non negative su $\mathbb{R}$ cioè $g_1(x) = |x-1|$, $g_2(x) = e^{2x}$ e quindi f è continua e non negativa. Siccome $g_1(1) = 0$, $g_1(x) > 0$ in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ e $g_2(x) > 0$ per $x \in \mathbb{R}$, deduciamo che l'unico punto in cui $f(x) = 0$ è $x = 1$. La funzione non presenta simmetrie o periodicità. Notiamo che

$$f(x) = \begin{cases} \left(x-1\right)e^{2x} & x \geq 1 \\ -\left(x-1\right)e^{2x} & x < 1 \end{cases}$$

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$.

- Da

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} |x-1|e^{2x} &= \lim_{x\to-\infty} -\left(x-1\right)e^{2x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x-1}{e^{-2x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{-2e^{-2x}} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

deduciamo che $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$

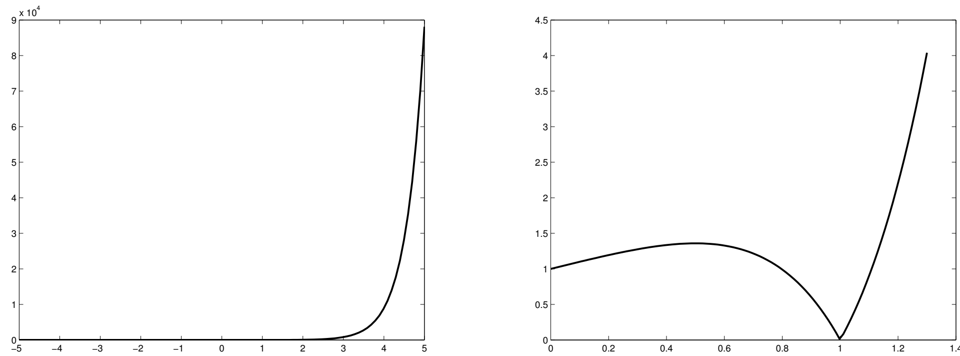

Figura 3: Grafico di f in $[-5, +5]$ e in $[0, 1.3]$.

- Da
$$\lim_{x \to +\infty} |x-1|e^{2x} = +\infty,$$
deduciamo che non vi è un asintoto orizzontale a $+\infty$.

Osserviamo inoltre che

- essendoci un asintoto orizzontale a $-\infty$, non ha senso studiare la presenza di un asintoto obliquo;
- da
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)e^{2x}}{x} = +\infty$$
deduciamo che f non possiede un asintoto obliquo o $+\infty$.

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ e quindi non ha senso porsi il problema se sia prolungabile per continuità in alcuni punti.

(c) La funzione f è derivabile ovunque eccetto in $x = 1$. Osserviamo che

- se $x > 1$ allora $f(x) = (x-1)e^{2x}$ e quindi
$$f'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} = (2x-1)e^{2x};$$
di conseguenza, da $2x - 1 > 0$ per $x \in (1, +\infty)$ deduciamo che la funzione è monotona crescente in $(1, +\infty)$;
- se $x < 1$ allora $f(x) = -(x-1)e^{2x}$ e quindi
$$f'(x) = -(2x-1)e^{2x};$$
di conseguenza essendo $-(2x-1) > 0$ per $x \in (-\infty, 1/2)$, $-(2x-1) \leq 0$ per $x \in (1/2, 1)$, $e^{2x} > 0$ per $x \in \mathbb{R}$, la funzione è monotona crescente in $(-\infty, 1/2)$, monotona decrescente in $(1/2, 1)$ e ha un minimo in $x_{\text{min}} = 1/2$.

Osserviamo che per quanto riguarda $x = 1$,
$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} [-(2x-1)]e^{2x} = -e^2,$$
mentre
$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x-1)e^{2x} = e^2.$$

(d) La funzione ha il grafico in figura.

FACOLTATIVO. La derivata seconda di f è facilmente
$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 4xe^{2x}, & x > 1 \\ -4xe^{2x}, & x < 1. \end{cases}$$

Da questo abbiamo facilmente che

- la funzione è convessa in $(-\infty, 0)$, in quanto $f^{(2)}(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0)$;
- la funzione è concava in $(0, 1)$, in quanto $f^{(2)}(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$;
- la funzione è convessa in $(1, +\infty)$, in quanto $f^{(2)}(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$;
- la funzione ha un flesso in $x_1 = 0$.

$\sim \circ \sim$

Esercizio 2
Calcolare, al variare del parametro reale $b > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6^x + e^{3x} - (\log x)^2}{x^7 - 3\cos x + 3e^{bx}}.$$

FACOLTATIVO: calcolare il limite anche per $b \leq 0$.

Svolgimento

- Analizziamo il numeratore. Sappiamo che, in virtù della maggior *crescita* dell'esponenziale rispetto alle altre funzioni, il numeratore dipende esclusivamente da come vanno tra loro e^{3x} o 6^x. Lo verifichiamo.
  - Osserviamo che se $0 < a < b$ allora, a $+\infty$, b^x domina su a^x, in quanto
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0.$$
  Essendo $e^{3x} = (e^3)^x$ e $6 < e^3$ abbiamo che e^{3x} domina su 6^x.
  - Non è difficile vedere che per la regola de L'Hopital
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{e^{(3/2)x}} = 0.$$
  e quindi per la continuità della funzione x^2
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^2}{e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log x}{e^{(3/2)x}}\right)^2 = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{e^{(3/2)x}}\right)^2 = 0.$$

  Quindi, a numeratore, il termine dominante è e^{3x}.
- Analizziamo il denominatore. A priori, vista la bassa crescita di x^7 rispetto a $3e^{bx}$ e dalla limitatezza di $3\cos(x)$, pensiamo che il termine dominante sia $3e^{bx}$, per ogni $b > 0$. Facciamo le necessarie verifiche.
  - Visto che (facilmente) $\lim_{x\to+\infty}(7\log(x)) - 3bx = -\infty$, se $b > 0$
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^7}{3e^{bx}} = (1/3) \lim_{x\to+\infty} e^{(7\log(x))-3bx} = 0$$
  ricaviamo che il termine $3e^{bx}$ *domina* su x^7;
  - Visto che, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3\cos(x)}{3e^{bx}} = 0$ in quanto $3\cos(x)$ è limitata e $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3e^{bx}}$ infinitesima, deduciamo che il termine $3e^{bx}$ *domina* su $3\cos(x)$;

  Quindi, a denominatore, il termine dominante è $3e^{bx}$.

Così
$$L := \lim_{x\to+\infty} \frac{6^x + e^{3x} - (\log x)^2}{x^7 - 3\cos x + 3e^{bx}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{3e^{bx}}.$$
Quindi se $b < 3$ l'integrale vale $+\infty$, se $b = 3$ allora vale $1/3$, altrimenti, per $b \in (3, +\infty)$, vale 0.

FACOLTATIVO. Nel caso $b < 0$, basta notare che il numeratore va sempre come e^{3x} e che, con facili conti, il denominatore va come x^7. Quindi il limite è equivalente a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^7}$$

che con una tecnica simile a quella usata in precedenza vale $+\infty$.

$$\sim \circ \sim$$

Esercizio 3
a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = x^2 \cos(x+1).$$

Svolgimento

Integriamo per parti. Da $\int \cos(x+1)dx = \sin(x+1)$, $Dx^2 = 2x$, ricaviamo

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(x+1)dx &= x^2 \sin(x+1) - \int (2x) \sin(x+1)dx \\ &= x^2 \sin(x+1) - 2\int x \sin(x+1)dx\end{aligned}$$

Inoltre da $\int \sin(x+1)dx = -\cos(x+1)$, $Dx = 1$, $\int \cos(x+1)dx = \sin(x+1)$

$$\begin{aligned}\int x \sin(x+1)dx &= x\,(-\cos(x+1)) - \int 1\,(-\cos(x+1))dx \\ &= -x \cos(x+1) + \int \cos(x+1)dx = -x \cos(x+1) + \sin(x+1) - c.\end{aligned}$$

Si conclude così che

$$\int x^2 \sin(x+1)dx = x^2 \sin(x+1) - 2\Big(-x \cos(x+1) + \sin(x+1)\Big) + c = (x^2-2)\sin(x+1) + 2x \cos(x+1) + c.$$

$$\sim \circ \sim$$

Esercizio 4
a) Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - y$.
b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = x^2+2y^2-y$ sull'insieme $A = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$.

Svolgimento

- Osserviamo che

$$\nabla f(x,y) = \Big(2x, 4y-1\Big)$$

e quindi, essendo i punti critici (x^*,y^*) tali che $\nabla f(x^*,y^*) = 0$, l'unico punto critico è $(0,1/4)$. Inoltre la matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza il punto $(0,1/4)$ è un minimo, poichè $(Hf(0,1/4))_{1,1} = 2$ e $\det(Hf(0,1/4)) = 2{\cdot}4 - 0{\cdot}0 = 8$.

- Osserviamo che se (x,y) verifica $x^2+y^2 = 1$, necessariamente

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - y = (x^2+y^2) + y^2 - y = y^2 - y + 1.$$

Posto $g(y) = y^2-y+1$, notiamo che nel dominio richiesto, il cerchio con centro l'origine e raggio 1, abbiamo che $y \in [-1,1]$ e quindi studiamo i massimi e i minimi della funzione g in $[-1,1]$. Poichè $g'(y) = 2y-1$, la funzione g è monotona decrescente per $y \in [-1,1/2]$ e crescente in $y = [1/2,1]$. Quindi $y^* = 1/2$ è un minimo e $y_\pm = \pm 1$ sono massimi locali. Da $g(-1) = 3$, $g(1) = 1$ deduciamo che $x = -1$ è il massimo globale di g. Così, dovendo essere $x^2+y^2 = 1$, deduciamo che $(0,-1)$ è il massimo assoluto, mentre $(\pm\sqrt{3/4}, 1/2)$ sono minimi assoluti.

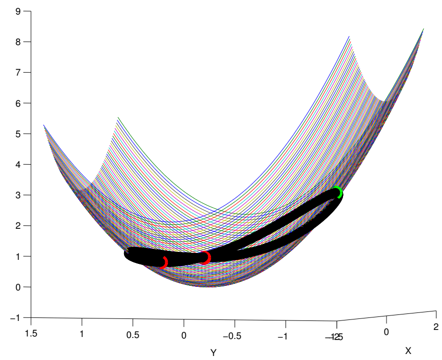

Figura 4: Grafico di f in $[-1.5, +1.5] \times [-1.5, +1.5]$. In nero i valori sul cerchio unitario.

La funzione ha il grafico in figura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015
Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2015

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) = |x-2|e^{3x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

FACOLTATIVO calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento

(a) La funzione f è il prodotto di due funzioni continue e non negative su $\mathbb{R}$ cioè $g_1(x) = |x-2|$, $g_2(x) = e^{3x}$ e quindi f è continua e non negativa. Siccome $g_1(2) = 0$, $g_1(x) > 0$ in $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ e $g_2(x) > 0$ per $x \in \mathbb{R}$ deduciamo che l'unico punto in cui $f(x) = 0$ è $x = 2$. La funzione non presenta simmetrie o periodicità. Notiamo che
$$f(x) = \begin{cases} \Big(x-2\Big)e^{3x} & x \geq 2 \\ -\Big(x-2\Big)e^{3x} & x < 2 \end{cases}$$

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$.

- Da
$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} |x-2|e^{3x} &= \lim_{x\to-\infty} -\Big(x-2\Big)e^{3x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x-2}{e^{-3x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{-3e^{-3x}} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$
deduciamo che $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$
- Da
$$\lim_{x\to+\infty} |x-2|e^{3x} = +\infty,$$
deduciamo che non vi è un asintoto orizzontale a $+\infty$.

Osserviamo inoltre che

- essendoci un asintoto orizzontale a $-\infty$, non ha senso studiare la presenza di un asintoto obliquo;
- da
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)e^{3x}}{x} = +\infty$$
deduciamo che f non possiede un asintoto obliquo o $+\infty$.

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ e quindi non ha senso porsi il problema se sia prolungabile per continuità in alcuni punti.

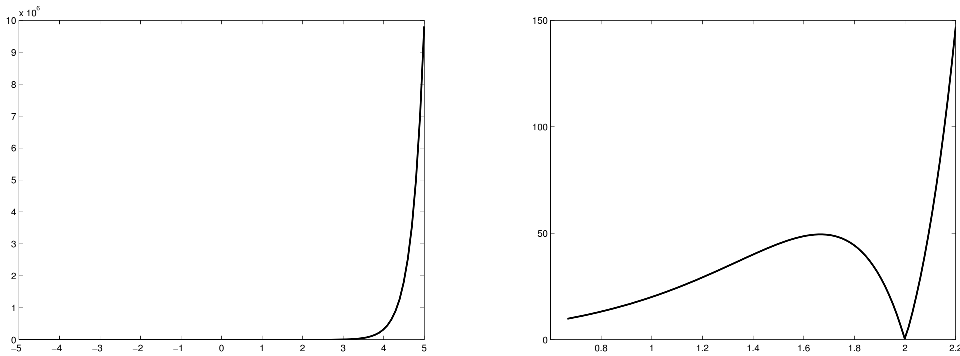

Figura 5: Grafico di f in $[-5,+5]$ e in $[0.66, 2.2]$.

(c) La funzione f è derivabile ovunque eccetto in $x = 2$. Osserviamo che

- se $x > 2$ allora $f(x) = (x-2)e^{3x}$ e quindi

$$f'(x) = e^{3x} + 3(x-2)e^{3x} = (3x-5)e^{3x};$$

  di conseguenza, da $3x - 5 > 0$ per $x \in (2, +\infty)$ deduciamo che la funzione è monotona crescente in $(2, +\infty)$;

- se $x < 2$ allora $f(x) = -(x-2)e^{3x}$ e quindi

$$f'(x) = -e^{3x} - 3(x-2)e^{3x} = -(3x-5)e^{3x};$$

  di conseguenza essendo $-(3x-5) > 0$ in $(-\infty, 5/3)$, $-(3x+5) \leq 0$ in $(5/3, 2)$, $e^{3x} > 0$ in $(-\infty, 2)$, la funzione è monotona crescente in $(-\infty, 5/3)$, monotona decrescente in $(5/3, 2)$ e ha un minimo in $x_{\text{min}} = 5/3$.

Osserviamo che per quanto riguarda $x = 1$,

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} [-(3x-5)]e^{3x}; = -e^3,$$

mentre

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x-5)e^{3x}; = e^3.$$

(d) La funzione ha il grafico in figura.

FACOLTATIVO La derivata seconda di f è facilmente

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 3(3x-4)e^{3x}, & x > 2 \\ -3(3x-4)e^{3x}, & x < 2. \end{cases}$$

Da questo abbiamo facilmente che

- la funzione è convessa in $(-\infty, 4/3)$, in quanto $f^{(2)}(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 4/3)$;
- la funzione è concava in $(4/3, 2)$, in quanto $f^{(2)}(x) < 0$ per $x \in (4/3, 2)$;
- la funzione è convessa in $(2, +\infty)$, in quanto $f^{(2)}(x) \geq 0$ per $(2, +\infty)$;
- la funzione ha un flesso in $x_1 = 4/3$.

$\sim \circ \sim$

Esercizio 2
Calcolare, al variare del parametro reale $a > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 - 2(\log x)^2 + 3e^{ax}}{3^x + e^{3x} - (\sin x)^5}.$$

FACOLTATIVO: calcolare il limite anche per $a \leq 0$.

Svolgimento

- Analizziamo il numeratore per $a > 0$. Sappiamo che, in virtù della maggior *crescita* dell'esponenziale rispetto alle altre funzioni, il numeratore va come $3e^{ax}$. Lo verifichiamo.
  - Da
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{3e^{ax}} = (1/3) \lim_{x\to+\infty} e^{5\log(x)-ax}$$
e
$$\lim_{x\to+\infty} 5\log(x) - ax = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{5\log(x)}{x} - a\right) = -\infty \tag{5}$$
deduciamo facilmente dalla regola de L'Hopital che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{3e^{ax}} = 0.$$
  - Da
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{e^{(a/2)x}} = 0,$$
deduciamo che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2(\log x)^2}{3e^{ax}} = (2/3) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log(x)}{e^{(a/2)x}}\right)^2 = 0.$$

  Quindi, a numeratore, il termine dominante è, indipendentemente da a, $3e^{ax}$.
- Analizziamo il denominatore. A priori, vista la limitatezza di $\sin(x)$, pensiamo che il termine dominante possa essere uno tra 3^x e e^{3x}. Facciamo le necessarie verifiche.
  - Osserviamo che se $0 < a < b$ allora, a $+\infty$, b^x domina su a^x, in quanto
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0.$$
Essendo $e^{3x} = (e^3)^x$ e $3 < e^3$ abbiamo che e^{3x} domina su 3^x.
  - Essendo $(\sin(x))^5$ limitata in quanto lo è $\sin(x)$, poichè $1/(e^{3x}) \to 0$ per $x \to +\infty$, abbiamo che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sin(x))^5}{e^{3x}} = 0.$$

  Quindi, a denominatore, il termine dominante è e^{3x}.

Così
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 - 2(\log x)^2 + 3e^{ax}}{3^x + e^{3x} - (\sin x)^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^{ax}}{e^{3x}}$$
Quindi se $a < 3$ l'integrale vale 0, se $a = 3$ allora vale 3, altrimenti, per $a \in (3, +\infty)$, vale $+\infty$.

FACOLTATIVO. Per quanto riguarda la parte facoltativa, è facile verificare che in questo caso il numeratore va sempre come x^5. Quindi il limite è equivalente a
$$L := \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{e^{3x}}$$
da cui consegue con una tecnica simile a quella usata in precedenza che $L = 0$.

$\sim \circ \sim$

Esercizio 3
a) Calcolare una primitiva di
$$f(x) = x^2 \sin(x+3).$$

Svolgimento

Integriamo per parti. Da $\int \sin(x+3)dx = -\cos(x+3)$, $Dx^2 = 2x$, ricaviamo
$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(x+3)dx &= -x^2 \cos(x+3) - \int (2x)\,(-\cos(x+3))dx \\ &= -x^2 \cos(x+3) + 2\int x\,(\cos(x+3))dx \end{aligned}$$

Inoltre da $\int \cos(x+3)dx = \sin(x+3)$, $Dx = 1$, $\int \sin(x+3)dx = -\cos(x+3)$
$$\begin{aligned} \int x \cos(x+3)dx &= x \sin(x+3) - \int 1 \cdot \sin(x+3)dx \\ &= x \sin(x+3) - \int \sin(x+3)dx = x \sin(x+3) + \cos(x+3). \end{aligned}$$

Si conclude così che
$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(x+3)dx &= -x^2 \cos(x+3) + 2\int x \cos(x+3)dx = -x^2 \cos(x+3) + 2\Big(x \sin(x+3) + \cos(x+3)\Big) + c \\ &= (2-x^2) \cos(x+3) + 2x \sin(x+3) + c. \end{aligned}$$

$\sim \circ \sim$

Esercizio 4
a) Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + x$.
b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + x$ sull'insieme $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Svolgimento

- Osserviamo che
$$\nabla f(x,y) = \Big(4x+1, -2y\Big)$$
e quindi, essendo i punti critici (x^*, y^*) tali che $\nabla f(x^*, y^*) = 0$, il punto critico è $(-1/4, 0)$. Inoltre la matrice Hessiana è
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Di conseguenza il punto è critico è di sella, poichè $\det(Hf(1/4,0)) = 4 \cdot -2 - 0 \cdot 0 = -8$.

- Osserviamo che se (x,y) verifica $x^2 + y^2 = 1$, necessariamente
$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 + x = 3x^2 - (x^2 + y^2) + x = 3x^2 + x - 1.$$
Posto $g(x) = 3x^2 + x - 1$, notiamo che nel dominio richiesto, il cerchio con centro l'origine e raggio 1, abbiamo che $x \in [-1,1]$ e quindi studiamo i massimi e i minimi della funzione g in $[-1,1]$. Poichè $g'(x) = 6x - 1$, la funzione g è monotona decrescente per $x \in [-1, -1/6]$ e crescente in $x = [-1/6, 1]$. Quindi $x^* = -1/6$ è un minimo e $x_\pm = \pm 1$ sono massimi locali. Da $g(-1) = 1$, $g(1) = 3$ deduciamo che $x = 1$ è il massimo globale di g. Così, dovendo essere $x^2 + y^2 = 1$, deduciamo che $(1,0)$ è il massimo assoluto, mentre $(-1/6, \pm\sqrt{1 - (1/36)})$ sono minimi assoluti.

La funzione ha il grafico in figura.

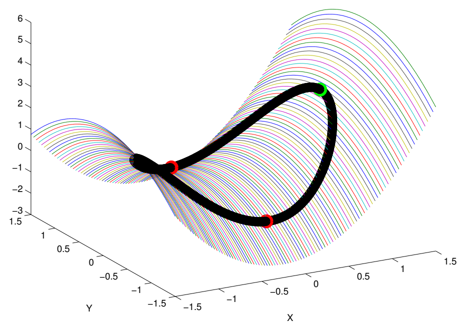

Figura 6: Grafico di f in $[-1.5, +1.5] \times [-1.5, +1.5]$. In nero i valori sul cerchio unitario.

$\sim \circ \sim$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

20 febbraio 2015

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = |x+1|e^{3x}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

FACOLTATIVO calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

Svolgimento

(a) La funzione f è il prodotto di due funzioni continue e non negative su $\mathbb{R}$ cioè $g_1(x) = |x+1|$, $g_2(x) = e^{3x}$ e quindi f è continua e non negativa. Siccome $g_1(-1) = 0$, $g_1(x) > 0$ in $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ e $g_2(x) > 0$ per $x \in \mathbb{R}$ deduciamo che l'unico punto in cui $f(x) = 0$ è $x = -1$. La funzione non presenta simmetrie o periodicità. Notiamo che

$$f(x) = \begin{cases} \left(x+1\right)e^{3x} & x \geq -1 \\ -\left(x+1\right)e^{3x} & x < -1 \end{cases}$$

(b) Gli estremi del dominio sono $\pm\infty$.

- Da
$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} |x+1|e^{3x} &= \lim_{x\to-\infty} -\left(x+1\right)e^{3x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x+1}{e^{-3x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{-3e^{-3x}} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$
deduciamo che $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$
- Da
$$\lim_{x\to+\infty} |x+1|e^{3x} = +\infty,$$
deduciamo che non vi è un asintoto orizzontale a $+\infty$.

Osserviamo inoltre che

- essendoci un asintoto orizzontale a $-\infty$, non ha senso studiare la presenza di un asintoto obliquo;
- da
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^{3x}}{x} = +\infty$$
deduciamo che f non possiede un asintoto obliquo o $+\infty$.

La funzione è continua in $\mathbb{R}$ e quindi non ha senso porsi il problema se sia prolungabile per continuità in alcuni punti.

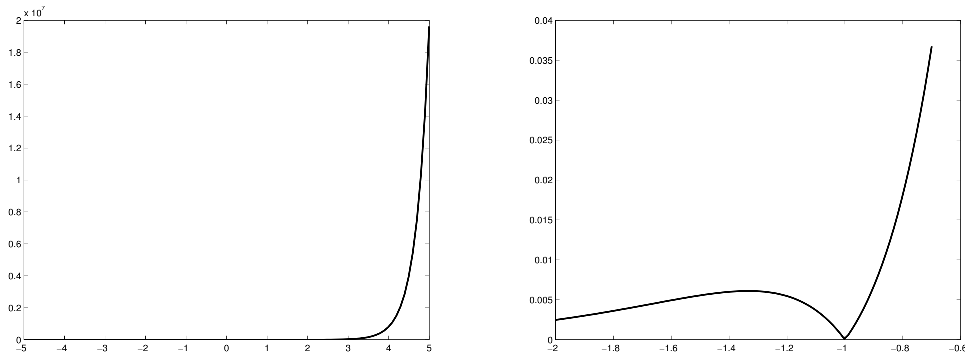

Figura 7: Grafico di f in $[-5, +5]$ e in $[-2, -0.7]$.

(c) La funzione f è derivabile ovunque eccetto in $x = -1$. Osserviamo che

- se $x > -1$ allora $f(x) = (x+1)e^{3x}$ e quindi

$$f'(x) = e^{3x} + 3(x+1)e^{3x} = (3x+4)e^{3x};$$

  di conseguenza, da $3x + 4 > 0$ per $x \in (-1, +\infty)$ deduciamo che la funzione è monotona crescente in $(-2, +\infty)$;

- se $x < -1$ allora $f(x) = -(x+1)e^{3x}$ e quindi

$$f'(x) = -(3x+4)e^{3x};$$

  di conseguenza essendo $-(3x+4) > 0$ per $x \in (-\infty, -(4/3))$, $-(3x+4) \leq 0$ per $x \in (-(4/3), -2)$, $e^{3x} > 0$ per $x \in \mathbb{R}$, la funzione è monotona crescente in $(-\infty, -(4/3))$, monotona decrescente in $(-(4/3), -2)$ e ha un minimo in $x_{\text{min}} = -4/3$.

Osserviamo che per quanto riguarda $x = 1$,

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} [-(3x+4)]e^{3x}; = -e^{-3},$$

mentre

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x+4)e^{3x}; = e^{-3}.$$

(d) La funzione ha il grafico in figura.

(Facoltativo) La derivata seconda di f è facilmente

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 3(3x+5)e^{3x}, & x > -1 \\ -3(3x+5)e^{3x}, & x < -1. \end{cases}$$

Da questo abbiamo facilmente che

- la funzione è convessa in $(-\infty, -5/3)$, in quanto $f^{(2)}(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -5/3)$;
- la funzione è concava in $(-5/3, -2)$, in quanto $f^{(2)}(x) < 0$ per $x \in (-5/3, -1)$;
- la funzione è convessa in $(-1, +\infty)$, in quanto $f^{(2)}(x) \geq 0$ per $(-1, +\infty)$;
- la funzione ha un flesso in $x_1 = -5/3$.

$\sim \circ \sim$

Esercizio 2
Calcolare, al variare del parametro reale $b > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + e^{3x} - (\log x)^3}{x^7 - 5\cos x + 2e^{bx}}.$$

FACOLTATIVO: calcolare il limite anche per $b \leq 0$.

Svolgimento

- Analizziamo il numeratore. Sappiamo che, in virtù della maggior *crescita* dell'esponenziale rispetto alle altre funzioni, il numeratore dipende esclusivamente da come vanno tra loro e^{3x} o 2^x. Lo verifichiamo.
  - Osserviamo che se $0 < a < b$ allora, a $+\infty$, b^x domina su a^x, in quanto
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0.$$
  Essendo $e^{3x} = (e^3)^x$ e $2 < e^3$ abbiamo che e^{3x} domina su 2^x.
  - Non è difficile vedere che per la regola de L'Hopital
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{e^x} = 0.$$
  e quindi per la continuità della funzione x^3
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^3}{e^{3x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\log x}{e^x}\right)^3 = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{e^x}\right)^3 = 0.$$

  Quindi, a numeratore, il termine dominante è e^{3x}.
- Analizziamo il denominatore. A priori, vista la bassa crescita di x^7 rispetto a $2e^{bx}$ e dalla limitatezza di $5\cos(x)$, pensiamo che il termine dominante sia $2e^{bx}$, per ogni $b > 0$. Facciamo le necessarie verifiche.
  - Visto che, se $b > 0$, abbiamo facilmente $\lim_{x \to +\infty} 7\log(x) - bx = -\infty$,
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^7}{2e^{bx}} = (1/2) \lim_{x \to +\infty} e^{7\log(x) - bx} = 0$$
  ricaviamo che il termine $2e^{bx}$ *domina* su x^7;
  - Visto che, $\lim_{x \to +\infty} \frac{5\cos(x)}{2e^{bx}} = 0$ in quanto $5\cos(x)$ è limitata e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2e^{bx}}$ infinitesima, deduciamo che il termine $2e^{bx}$ *domina* su $5\cos(x)$;

  Quindi, a denominatore, il termine dominante è $2e^{bx}$.

Così
$$L := \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + e^{3x} - (\log x)^3}{x^7 - 5\cos x + 2e^{bx}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{2e^{bx}}$$
Quindi se $b < 3$ l'integrale vale $+\infty$, se $b = 3$ allora vale $1/2$, altrimenti, per $b \in (3, +\infty)$, vale 0.

FACOLTATIVO. Per quanto riguarda la parte facoltativa, basta notare che in questo caso il numeratore va sempre come e^{3x}, mentre, con facili conti, il denominatore va come x^7. Quindi il limite è equivalente a
$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^7}$$
che con una tecnica simile a quella usata in precedenza porge $L = +\infty$.

$\sim \circ \sim$

Esercizio 3
a) Calcolare una primitiva di
$$f(x) = x^2 \cos(x + 3).$$

Svolgimento

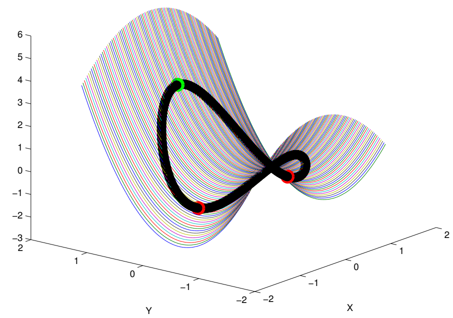

Figura 8: Grafico di f in $[-1.5, +1.5] \times [-1.5, +1.5]$. In nero i valori sul cerchio unitario.

Integriamo per parti. Da $\int \cos(x+3)dx = \sin(x+3)$, $Dx^2 = 2x$, ricaviamo

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(x+3)dx &= x^2 \sin(x+3) - \int (2x) \sin(x+3)dx \\ &= x^2 \sin(x+3) - 2\int x \sin(x+3)dx\end{aligned}$$

Inoltre da $\int \sin(x+3)dx = -\cos(x+3)$, $Dx = 1$, $\int \cos(x+3)dx = \sin(x+3)$

$$\begin{aligned}\int x \sin(x+3)dx &= x\,(-\cos(x+3)) - \int 1\,(-\cos(x+3))dx \\ &= -x \cos(x+3) + \int \cos(x+3)dx = -x \cos(x+3) + \sin(x+3) + c.\end{aligned}$$

Si conclude così che

$$\int x^2 \sin(x+3)dx = x^2 \sin(x+3) - 2\Big(-x \cos(x+3) + \sin(x+3)\Big) + c = (x^2-2)\sin(x+3) + 2x \cos(x+3) + c.$$

$\sim \circ \sim$

Esercizio 4

a) Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = 2y^2 - x^2 + y$.

b) Trovare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = 2y^2 - x^2 + y$ sull'insieme $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Svolgimento

- Osserviamo che
$$\nabla f(x, y) = \Big(-2x, 4y+1\Big)$$
e quindi, essendo i punti critici (x^*, y^*) tali che $\nabla f(x^*, y^*) = 0$, l'unico punto critico è $(0, -1/4)$. Inoltre la matrice Hessiana è
$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
Di conseguenza il punto $(0, -1/4)$ è di sella, poichè $\det(Hf(0, -1/4)) = -2 \cdot 4 - 0 \cdot 0 = -8$.

- Osserviamo che se (x, y) verifica $x^2 + y^2 = 1$, necessariamente
$$f(x, y) = 2y^2 - x^2 + y = 3y^2 - (y^2 + x^2) + y = 3y^2 + y - 1.$$
Posto $g(y) = 3y^2 + y - 1$, notiamo che nel dominio richiesto, il cerchio con centro l'origine e raggio 1, abbiamo che $y \in [-1, 1]$ e quindi studiamo i massimi e i minimi della funzione g in $[-1, 1]$. Poichè $g'(y) = 6y - 1$,

dallo studio del segno della derivata ricaviamo che la funzione g è monotona decrescente per $y \in [-1, -1/6]$ e crescente in $y = [-1/6, 1]$. Quindi $y^* = -1/6$ è un minimo e $y = \pm 1$ sono massimi locali. Da $g(-1) = 1$, $g(1) = 3$ deduciamo che $y_2 = 1$ è il massimo globale di g. Così, dovendo essere $x^2 + y^2 = 1$, deduciamo che $(0, 1)$ è il massimo assoluto, mentre $(\pm\sqrt{1 - (1/36)}, -1/6) \approx (\pm 0.9860132971832694, -0.1\overline{6})$ sono minimi assoluti.

La funzione ha il grafico in figura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.