ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di Laurea in Scienze Statistiche

23 giugno 2015, **TEMA 1**

IAM: es 1, es 2, es 3a, es 4a. IAM1 (v.o.): es 1, es 2. IAM2 (v.o.): es 3 a e b, es 4 a e b.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\arctan|x^2-1|}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento.

(a) Le funzioni $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, $|x^2-1| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sono continue e quindi lo è la loro composizione. Così $f : \mathbb{R} \to [1, \exp(\pi/2))$ è continua e quindi il suo dominio è tutto $\mathbb{R}$. Poichè

$$f(x) = e^{\arctan|x^2-1|} = e^{\arctan|(-x)^2-1|} = f(-x)$$

la funzione è pari. Non è periodica ed è sempre positiva, visto che lo è $\exp(x)$.

(b) Visto che il dominio è tutto $\mathbb{R}$ non ci sono limiti agli estremi del dominio da studiare. Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\arctan|x^2-1|} = e^{\pi/2},$$

e quindi la funzione ha esclusivamente asintoti orizzontali a $\pm\infty$. Essendo f continua, non ha senso prolungarla in qualche punto per continuità in qualche punto.

(c) Come già detto la funzione è continua. Da $D(\arctan(x)) = 1/(x^2+1)$,

$$D(|x^2-1|) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x^2-1>0 \\ -2x, \text{ se } x^2-1<0 \\ \text{non definita se } x^2-1=0 \end{cases}$$

$De^x = e^x$, e dal teorema della composizione di funzioni derivabili, otteniamo

$$\begin{cases} Df(x) = \frac{2x\exp(\arctan(|x^2-1|))}{(x^2-1)^2+1}, \text{ se } x^2-1>0 \\ Df(x) = \frac{-2x\exp(\arctan(|x^2-1|))}{(x^2-1)^2+1}, \text{ se } x^2-1<0 \\ \text{non definita se } x^2-1=0. \end{cases}$$

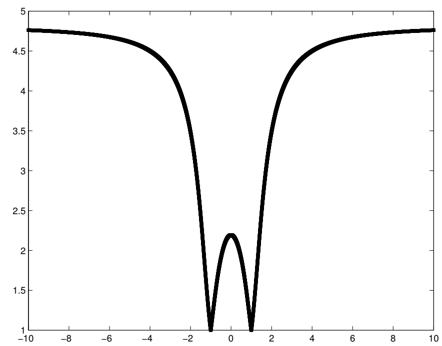

Figura 1: Grafico di f in $(-5,5)$.

Da

$$\lim_{x\to 1^+} Df(x) = 2,\ \lim_{x\to 1^-} Df(x) = -2,\ \lim_{x\to -1^-} Df(x) = -2,\ \lim_{x\to -1^+} Df(x) = +2,$$

la funzione non è derivabile in -1, $+1$, ma vista la continuità delle funzioni che la descrivono in $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$, lo è altrove. Il segno di Df, dove definita, è quello di

$$g(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x^2-1>0 \\ -2x, \text{ se } x^2-1<0 \end{cases}$$

Così, $Df(x) < 0$ in $(-\infty,-1)$, $Df(x) > 0$ in $(-1,0)$, $Df(x) < 0$ in $(0,1)$, $Df(x) > 0$ in $(1,+\infty)$ e quindi monotona strettamente decrescente in $(-\infty,-1)$, $(0,1)$, monotona strettamente crescente in $(1,+\infty)$, $(-1,0)$. Vista la continuità di f, ± 1 sono minimi e 0 il massimo.

(d) Per il grafico si veda la figura.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare, al variare del parametro reale $a > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + x^2 - x + x^5 \log x}{e^x - 1 - x^a}.$$

Svolgimento.

Ricordando che

$$\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^5)$$
$$\exp(x) - 1 = x + x^2/2 + o(x^3)$$

e osservato che

$$x^5 \log x = o(x^4)$$

in quanto per la regola di de L'Hopital (ricordare altrimenti il limite notevole $\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = 0$)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^5 \log(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} x\log(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{(1/x)} = 0$$

abbiamo

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + x^2 - x + x^5 \log x}{e^x - 1 - x^a} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x - x^3/6 + o(x^3) + x^2 - x + o(x^3)}{x + x^2/2 + o(x^3) - 1 - x^a} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + o(x^2)}{x + x^2/2 + o(x^3) - x^a}
\end{aligned}
$$

Visto che se $a<1$ abbiamo $x+x^2/2+o(x^3)-x^a \sim -x^a$, se $a=1$ abbiamo $x+x^2/2+o(x^3)-x^a \sim x^2/2$, se $a>1$ abbiamo $x+x^2/2+o(x^3)-x^a \sim x$, si ricava che $L=0$ per $a \neq 1$, mentre $L=2$ per $a=1$.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{3 - \log x}{x\,(\log^2 x - 1)}.$$

(**SOLO per IAM2 v.o. 2009**) Calcolare

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{3 - \log x}{x\,(\log^2 x - 1)} dx.$$

Svolgimento.

(a) Posto $t = \log(x)$, da $dt = (1/x)dx$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
I(f) &= \int \frac{3 - \log x}{x\,(\log^2 x - 1)} dx = \int \frac{3-t}{t^2-1} dt \\
&= \int \frac{2 + (1-t)}{t^2-1} dt = \int \frac{(-2)}{1-t^2} dt + \int \frac{(-1)}{1+t} dt \\
&= -\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt + \int \frac{(-1)}{1+t} dt \\
&= \log(|1-t|) - 2\log(|1+t|) + C = \log\left(\frac{|1-t|}{|1+t|^2} \right) + C \\
&= \log\left(\frac{|1-\log(x)|}{|1+\log(x)|^2} \right) + C
\end{aligned}
\tag{1}
$$

con C costante arbitraria.

(b) Dal teorema fondamentale del calcolo, visto il risultato ottenuto nel punto precedente e cioè

$$\int \frac{3 - \log x}{x\,(\log^2 x - 1)} dx = \log\left(\frac{|1-\log(x)|}{|1+\log(x)|^2} \right) + C$$

ricaviamo

$$\begin{aligned}\int_{e^2}^{e^3} \frac{3-\log x}{x\,(\log^2 x - 1)}dx &= \log\left(\frac{|1-\log(e^3)|}{|1+\log(e^3)|^2}\right) - \log\left(\frac{|1-\log(e^2)|}{|1+\log(e^2)|^2}\right) \\ &= \log\left(\frac{|1-3|}{|1+3|^2}\right) - \log\left(\frac{|1-2|}{|1+2|^2}\right) = \log(1/8) - \log(1/9) = \log(9/8).\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n + n^2}{e^n + \log n}\right)^n.$$

(**SOLO per IAM2 v.o. 2009**) Studiare, al variare di $a > 1$, la convergenza della serie

$$\sum_{1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n + n^2 + a^n}{e^n + \log n}\right)^n.$$

Svolgimento.

(a) Osserviamo che

$$\gamma_n = \frac{\sin n + n^2}{e^n + \log n}$$

è definitivamente positiva e quindi posso applicare il criterio della radice. Notiamo che per $n \to +\infty$

$$\sin n + n^2 = n^2\left(\frac{\sin n}{n^2} + 1\right) \sim n^2$$

$$e^n + \log n = e^n\left(1 + \frac{\log n}{e^n}\right) \sim e^n.$$

Quindi

$$\lim_n \frac{\sin n + n^2}{e^n + \log n} = \lim_n \frac{n^2}{e^n} = 0$$

deduciamo dal criterio della radice che la serie è convergente.

(b) Osserviamo che

$$\gamma_n = \frac{\sin n + n^2 + a^n}{e^n + \log n}$$

è definitivamente positiva e quindi posso applicare il criterio della radice.

Se $0 \le a < 1$, visto che $a^n \to 0$,

$$\lim_n \frac{\sin n + n^2 + a^n}{e^n + \log n} = \lim_n \frac{n^2}{e^n} = 0$$

e quindi dal criterio della radice deduciamo che la serie è convergente.

Se $a > 1$, osservato che

$$\sin n + n^2 + a^n \sim a^n$$

ricaviamo

$$L_a := \lim_n \frac{\sin n + n^2 + a^n}{e^n + \log n} = \lim_n \frac{a^n}{e^n}.$$

Se $1 < a < e$, abbiamo

$$L_a = \lim_n (a/e)^n = 0$$

e quindi dal criterio della radice deduciamo che la serie è convergente.

Se $a > e$, abbiamo

$$L_a = \lim_n (a/e)^n = +\infty$$

e quindi dal criterio della radice deduciamo che la serie è divergente.

Se $a = e$ nulla si può dire col criterio della radice. Osserviamo però che per $n \geq 2$

$$\left(\frac{\sin n + n^2 + a^n}{e^n + \log n}\right)^n \geq \left(\frac{-1 + n^2 + a^n}{e^n + n^2 - 1}\right)^n = 1$$

e quindi il termine n-simo non è infinitesimo e quindi la serie diverge.

Tempo: IAM due ore, IAM1 e IAM2 v.o. 2009 un'ora. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2014-2015

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

23 giugno 2015, **TEMA 2**

IAM: es 1, es 2, es 3a, es 4a. IAM1 (v.o.): es 1, es 2. IAM2 (v.o.): es 3 a e b, es 4 a e b.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\arctan|4-x^2|}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f, calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) + x^3 - x + x^4 \log x}{1 - \cos x - x^\alpha}.$$

Esercizio 3 (8 punti)
(a) Calcolare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{(2-\sin x)\cos x}{1-\sin^2 x}.$$

(b) (**SOLO per IAM2 v.o. 2009**) Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(2-\sin x)\cos x}{1-\sin^2 x} dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)
(a) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_1^{+\infty} \left(\frac{n^5 + \log n}{3^n + \cos n}\right)^n.$$

(b) (**SOLO per IAM2 v.o. 2009**) Studiare, al variare di $b > 1$, la convergenza della serie

$$\sum_1^{+\infty} \left(\frac{n^5 + \log n + b^n}{3^n + \cos n}\right)^n.$$

Tempo: IAM due ore, IAM1 e IAM2 v.o. 2009 un'ora. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.