Università degli Studi di Padova

C.L. Statistica — Analisi II
III Appello— 16 Settembre 2014
Durata: 1 ora e 45 minuti

Esercizio 1. Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x - \sin x)\cos^2 x}{x^{4-\alpha} \log^2 x \log(1+x)} dx.$$

Esercizio 2. Si determini l'insieme dei parametri reali x per i quali la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \right)^n$$

converge assolutamente e, per tali parametri, si scriva il limite della serie.

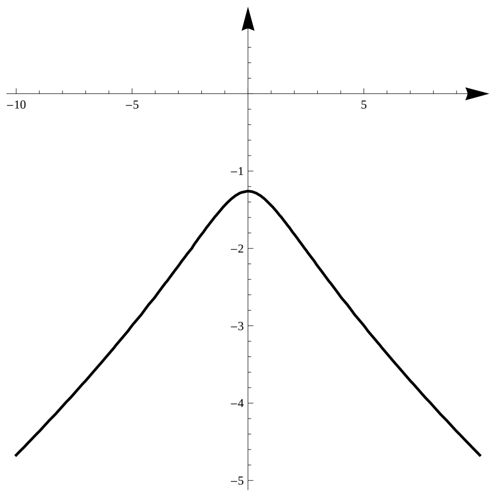
Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

a. Si dica quanto vale $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$
b. Considerato il vincolo (disegnato in figura)

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 + x^2 + 2 = 0\},$$

si determinino i valori massimo e minimo che assume la funzione f vincolata ad M e si scrivano (se esistono) i punti in cui tale massimo e minimo sono ottenuti.



Teoria 1. Si dia la definizione di serie convergente, di serie divergente e di serie irregolare

Teoria 2. Dato un integrale del tipo

$$\int R(\cos x, \sin x, \tan x) dx$$

con R funzione razionale fratta, che tipo di cambiamenti di variabile è conveniente usare? Che tipo di funzione si ottiene dopo il cambiamento di variabile?

Esercizio 1. Come prima cosa, essendo l'intervallo limitato, si devono determinare eventuali punti in cui la funzione diverge. Questi sono un sottoinsieme dei punti in cui il denominatore di annulla, ovvero solo l'origine. Dobbiamo quindi limitarci a studiare il comportamento asintotico della funzione nell'origine. Cercheremo di confrontare la funzione con funzioni del tipo $x^\alpha \log^\beta x$ il cui integrale attorno a zero sappiamo: convergere se $\alpha > -1$ (per ogni β), divergere se $\alpha < -1$ (per ogni β), convergere se $\alpha = 1$ quando $\beta < -1$, divergere se $\alpha = 1$ quando $\beta \geq -1$.

Poiché $\sin x \simeq x - x^3/6 + O(x^5)$, la funzione $x - \sin x$ è asintotica a $x^3/6$. Il termine $\cos^2 x$ tende ad 1. Il termine $\log^2 x$ non si può riscrivere come potenza di x, e tende a $+\infty$ (essendo a denominatore, agevolerà la convergenza dell'integrale solo quando la potenza di x porterà l'integrale al confine tra convergenza e divergenza, ovvero sarà -1), il termine $\log(1+x)$ è asintotico ad x.

Seque che la funzione è asintotica a

$$\frac{(x^3/6)(1)}{(x^{4-\alpha})(\log^2 x)(x)} = \frac{1}{6}\frac{x^{3+\alpha-4-1}}{\log^2 x} = \frac{1}{6}\frac{x^{\alpha-2}}{\log^2 x}.$$

Per il teorema sul confronto asintotico sappiamo che questo integrale converge quando $\alpha - 2 > -1$, ovvero quando $\alpha > 1$, diverge quando $\alpha - 2 < -1$, ovvero quando $\alpha < 1$. Nel caso particolare in cui $\alpha = 1$ lo studio asintotico fa coincidere la convergenza dell'integrale con l'integrale omologo di argomento

$$\frac{1}{6}\frac{1}{x \log^2 x},$$

e si ha quindi la convergenza dell'integrale per il valore particolare di $\alpha = 1$.

Esercizio 2. Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{x^2-x+2}{x^2+1}$ la quale converge assolutamente se e solo se la ragione è minore di 1 in modulo (se la ragione è in modulo maggiore od uguale ad 1 la serie diverge od è indeterminata a seconda che questa sia positiva o negativa). Si ha quindi che la serie converge assolutamente se e solo se

$$-1 < \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} < 1.$$

Studiamo i due casi separatamente. La disuguaglianza di destra è $\frac{x^2-x+2}{x^2+1} < 1$ ovvero $x^2 - x + 2 < x^2 + 1$ (fortunatamente, $x^2 + 1$ è sempre positivo), ovvero $1 < x$. La disuguaglianza di sinistra è $\frac{x^2-x+2}{x^2+1} > -1$, ovvero $x^2 - x + 2 > -x^2 - 1$, ovvero $2x^2 - x + 3 > 0$. Siccome il discriminante di questo polinomio è -23, si ha che il polinomio è sempre positivo, e la disuguaglianza è sempre verificata.

Quindi la serie converge se e solo se $x > 1$. In tal caso si usa il fatto che $\sum r^n = 1/(1-r)$, e si ottiene che il limite è

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2-x+2}{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{x^2+1-(x^2-x+2)} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

(si ritrova la divergenza della serie quando x tende all'estremo della regione di convergenza assoluta)

Esercizio 3. La funzione tende a 0. Il gradiente della funzione è

$$\nabla f = -2\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

mentre il gradiente del vincolo è $\nabla g = (2x, 3y^2)$. Si deve quindi studiare il sistema

$$\frac{x}{(x^2+y^2)^2} = 2x\lambda, \quad \frac{y}{(x^2+y^2)^2} = 3y^2\lambda, \quad y^3 + x^2 + 2 = 0.$$

La prima equazione porge due alternative: o $x = 0$, nel qual caso si ha dalla terza $y = \sqrt[3]{-2}$ e dalla seconda un'identità segue che $(0, \sqrt[3]{-2})$ è un punto critico, oppure $x \neq 0$ da cui segue che $\lambda = (x^2 + y^2)^{-2}/2$. Sostituendo nella seconda si ha che $2y = 3y^2$. Entrambe le soluzioni di questa equazione, $y = 0$ ed $y = 2/3$, se sostituite nella terza equazione, non porgono soluzioni in x. Segue quindi che il punto critico $(0, \sqrt[3]{-2})$ è massimo locale e globale con valore $1/\sqrt[3]{4}$. Il minimo globale è invece zero, ed è raggiunto all'infinito (che non è un punto del piano).