ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2017-2018

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

21 febbraio 2018

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2parte1. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{|x-2|}}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento.

(a) Il dominio è costituito da $D = [1, +\infty)\backslash\{2\}$. La funzione non ha simmetrie, non ha periodicità. Inoltre $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$, e f è nulla solo in $x = 1$.

(b) Si verifica facilmente che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 1,$$

e quindi si ha esclusivamente un asintoto orizzontale $y = 1$, e che

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty. \tag{1}$$

La funzione, per (**??**), non è prolungabile per continuità in $x = 2$. Inoltre $f(1) = 0$.

(c) La funzione è continua nel dominio. Si ha

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}},\ \textit{se } x > 2$$

e

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}},\ \textit{se } x < 2.$$

graficoB-eps-converted-to.pdf

Figure 1: Grafico di f.

Quindi se $x > 2$

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{-1/2} \frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2} = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{1/2} \frac{(-1)}{(x-2)^2} \tag{2}$$

Analogamente se $x < 2$,

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{2-x}\right)^{-1/2} \frac{(2-x)+(x-1)}{(2-x)^2} = \left(\frac{2-x}{x-1}\right)^{1/2} \frac{1}{(2-x)^2} \tag{3}$$

Essendo $f'(x) > 0$ per $x < 2$ e $f'(x) < 0$ per $x > 2$, la funzione è monotona crescente per $x \in [1, 2)$, monotona descrescente per $x > 2$. Inoltre non presenta massimo assoluto, mentre ha minimo assoluto in $x = 1$.

Si vede facilmente che $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$. Quindi in $x = 1$ la funzione ha un attacco verticale.

(d) Per il grafico si veda la Figura **??**.

Esercizio 2 (8 punti) Sia

$$a_n = \frac{9n^\alpha + \arctan n + \sin n}{(n+1)(n^3+5) + e^{-n}}$$

1. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.
2. Dire per quali α converge la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Svolgimento.

(a) Essendo arctan e sin limitate, mentre $9n^\alpha$ tende a $+\infty$ per $\alpha > 0$ deduciamo che

$$9n^\alpha + \arctan n + \sin n \sim 9n^\alpha.$$

Inoltre essendo $(n+1)(n^3+5) \sim n^4$ e e^{-n} infinitesima, abbiamo che il denominatore è asintotico a n^4. Di conseguenza

$$a_n \sim \frac{9n^\alpha}{n^4} = \frac{9}{n^{4-\alpha}}$$

da cui se $\alpha < 4$ converge a 0, $\alpha = 4$ converge a 9, se $\alpha > 4$ diverge.

(a) Essendo la serie a termini a serie positivi ha lo stesso comportamento, per il teorema di confronto asintotico, di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^{4-\alpha}}$ ovvero di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4-\alpha}}$. Di conseguenza, converge per $4 - \alpha > 1$ ovvero $\alpha \in [0, 3)$ e diverge per $\alpha \in [3, +\infty)$.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \log(2+x^2)dx.$$

(suggerimento: usare il metodo di integrazione per parti)

Svolgimento. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\int \log(2+x^2)dx &= \int 1\cdot\log(2+x^2)dx = x\log(2+x^2) - \int x\cdot\frac{2x}{2+x^2}dx \\
&= x\log(2+x^2) - 2\int \frac{x^2}{2+x^2}dx = x\log(2+x^2) - 2\int \frac{2+x^2-2}{2+x^2}dx \\
&= x\log(2+x^2) - 2\int 1dx + 4\int \frac{1}{2+x^2}dx \\
&= x\log(2+x^2) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C, \qquad (4)
\end{aligned}$$

essendo per $t=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $dt=\frac{1}{\sqrt{2}}dx$ ovvero $dx=\sqrt{2}dt$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2+x^2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{1+t^2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan t + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log(2+x^2)dx &= (\log(3) - 2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}) - (0\log(2+0^2) - 2\cdot 0 + \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\frac{0}{\sqrt{2}}) \\
&= \log(3) - 2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Sia data la funzione

$$f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-3).$$

Determinare il dominio e disegnarlo sul piano cartesiano. Dire se f è differenziabile nel punto $(0,\sqrt{3})$ e calcolare la derivata direzionale di f in $(0,\sqrt{3})$ nella direzione $v=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$. Scrivere il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(0,\sqrt{3},0)$.

Svolgimento. Il dominio D consiste in tutti i punti (x,y) tali che $-1\le x^2+y^2-3\le 1$, ovvero dei punti compresi tra le circonferenze $x^2+y^2=2$ e $x^2+y^2=4$.

graficodom-eps-converted-to.pdf

Figure 2: Dominio D.

Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2-3)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2-3)^2}}.$$

Le derivate parziali di f esistono continue in ogni punto dell'insieme

$$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x^2+y^2-3 < 1\} = \{(x,y) \mid 2 < x^2+y^2 < 4\}.$$

Notiamo che $D' \subseteq D$ (si tratta del dominio D meno le due circonferenze $x^2+y^2=2$ e $x^2+y^2=4$). Per il teorema del differenziale totale, la funzione è differenziabile in ogni punto di D'. Notiamo che $(0,\sqrt{3}) \in D'$, quindi f è differenziabile nel punto $(0,\sqrt{3})$. Possiamo quindi calcolare la derivata direzionale in $(0,\sqrt{3})$ nella direzione $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ con la formula del gradiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0,\sqrt{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(0,\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(0,\sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{3}\cdot 0}{\sqrt{1-(0+3-3)^2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-(0+3-3)^2}} = \sqrt{3}. \end{aligned} \tag{7}$$

Infine, il piano tangente nel punto $(0,\sqrt{3},0)$ ha equazione

$$\begin{aligned} z &= f(0,\sqrt{3}) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,\sqrt{3})\cdot(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\sqrt{3})\cdot(y-\sqrt{3}) \\ \text{cioè} \quad z &= 2\sqrt{3}y - 6. \end{aligned} \tag{8}$$

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2017-2018

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

21 febbraio 2018

TEMA 2

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2parte1. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{|x-2|}}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (8 punti) Sia

$$a_n = \frac{5n^\alpha - \arctan n - e^{-2n}}{(n^4-1)(n^2+3)+\sin n}$$

1. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

2. Dire per quali $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \log(x^2+4)dx.$$

(suggerimento: usare il metodo di integrazione per parti)

Esercizio 4 (8 punti)

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-2).$$

Determinare il dominio e disegnarlo sul piano cartesiano. Dire se f è differenziabile nel punto $(1,1)$ e calcolare la derivata direzionale di f in $(1,1)$ nella direzione $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Scrivere il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(1,1,0)$.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.