ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, A. Sommariva, a.a. 2017-2018

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

19 giugno 2018

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: es 3, 4.

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right) e^x.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento.

(a) Il dominio è dato da $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, non ci sono particolari simmetrie o periodicità. Il segno è quello di $\frac{x+1}{x-1}$, essendo $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dallo studio della disequazione $\frac{x+1}{x-1} > 0$ si ottiene che per $x < -1$ o $x > 1$ la funzione è positiva, per $-1 < x < 1$ negativa, e si annulla in $x = -1$ (si noti che 1 non appartiene al dominio).

(b) Possiamo calcolare i limiti agli estremi del dominio

- da $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ otteniamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} e^x = +\infty$;
- da $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ otteniamo che $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} e^x = 0$;
- da $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ricaviamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Quindi la funzione ha asintoto orizzontale $y = 0$ a $-\infty$, mentre non ha né asintoti orizzontali né asintoti obliqui a $+\infty$.

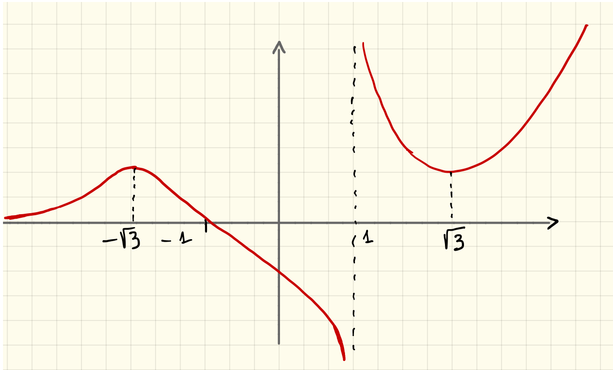
Inoltre ossserviamo che

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x+1}{x-1} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{x+1}{x-1} e^x = -\infty.$$

Dunque f ha un asintoto verticale $x = 1$. La funzione non è prolungabile per continuità in $x = 1$.

(c) La funzione è continua e derivabile nel dominio. Si vede che

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = -\frac{2}{(x-1)^2}$$



per cui

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)e^x\right)' &= \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' e^x + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)(e^x)' \\ &= \frac{-2}{(x-1)^2}e^x + \frac{x+1}{x-1}e^x = \frac{-2+(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}e^x = \frac{(x^2-3)}{(x-1)^2}e^x.\end{aligned}$$

Per discutere il segno della derivata, notiamo che questa è positiva qualora lo sia x^2-3 (essendo nel dominio $\frac{e^x}{(x-1)^2} > 0$) e quindi per $x > \sqrt{3}$ o $x < -\sqrt{3}$. Di conseguenza la funzione è crescente per $x < -\sqrt{3}$, $x > \sqrt{3}$, decrescente altrove. Di conseguenza $x = -\sqrt{3}$ è un massimo locale, $x = +\sqrt{3}$ un minimo locale. Notiamo che la funzione non ha massimo assoluto dato che ha limite $+\infty$ per $x \to +\infty$ e $x \to 1^+$, e non ha minimo assoluto dato che ha limite $-\infty$ per $x \to 1^-$.

(d) Per il grafico si veda la Figura.

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^2}{e^{x^2} - \cos x}.$$

Facoltativo: Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ il limite : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x^\alpha + x^2}{e^{x^2} - \cos x}$.

Svolgimento. Ricordiamo gli sviluppi di Mc Laurin

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Inoltre da $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t = x^2$ otteniamo

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2).$$

Quindi il numeratore si scrive come

$$\sin x - x + x^2 = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + x^2 = x^2 + o(x^2).$$

mentre il denominatore si scrive come

$$e^{x^2} - \cos x = 1 + x^2 + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Sostituendo nel limite si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^2}{e^{x^2} - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2}\left(\frac{1+o(1)}{\frac{3}{2}+o(1)}\right) = \frac{2}{3}.$$

Facoltativo. Per quanto visto prima,

$$\sin x - x^\alpha + x^2 = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x^\alpha + x^2 = \begin{cases} -x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } \alpha < 1 \\ x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha = 1 \\ x + o(x) & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Dunque sostituendo nel limite si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x^\alpha + x^2}{e^{x^2} - \cos x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^\alpha + o(x^\alpha)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-2}\left(\frac{-1+o(1)}{\frac{3}{2}+o(1)}\right) = -\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)} = \frac{2}{3} & \text{se } \alpha = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x+o(x)}{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} x^{-1}\left(\frac{1+o(1)}{\frac{3}{2}+o(1)}\right) = +\infty. & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Esercizio 3 (8 punti)

1. Determinare le primitive di
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}.$$
2. Dire se converge l'integrale generalizzato
$$\int_2^{+\infty} f(x)dx$$
e in caso affermativo calcolarlo.

Svolgimento. 1. Osserviamo che $x^2 + x - 2$ ha quali zeri $x = 1$ e $x = -2$ e quindi $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Cerchiamo A e B tali che

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{x^2+x-2} = \frac{(A+B)x + (2A-B)}{x^2+x-2}$$

e quindi per confronto A, B risolvono

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $A = 1/3$ e $B = -1/3$. Di conseguenza

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x-2}dx &= \int \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx\right) = \frac{1}{3}(\ln|x-1| - \ln|x+2|) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{|x+2|} + C. \qquad (1)
\end{aligned}$$

2. Osserviamo che $\frac{1}{x^2+x-2} \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$. Dunque dato che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, deduciamo per il criterio del confronto asintotico che l'integrale richiesto converge.

In particolare il valore dell'integrale è dato da

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{|x+2|}\right]_2^M = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\left(\frac{M-1}{M+2}\right) - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\ln(1/4) = \frac{1}{3}\ln 4.$$

Esercizio 4 (8 punti) Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^2 - \frac{4}{3}y - 6xy^2$$

e studiarne la natura.

Svolgimento.

Osserviamo che la funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ e ha gradiente

$$\nabla f(x,y) = (2x - 6y^2, -\frac{4}{3} - 12xy).$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - 6y^2 = 0 \\ -\frac{4}{3} - 12xy = 0. \end{cases}$$

Risolviamo per sostituzione

$$\begin{cases} x = 3y^2 \\ xy = -\frac{4}{3}\frac{1}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y^2 \\ (3y^2)y = -\frac{1}{3^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y^2 \\ y^3 = -\frac{1}{3^3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Dunque $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ è l'unico punto critico della funzione.

Osserviamo che la matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -12y \\ -12y & -12x \end{bmatrix}$$

e quindi

$$Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Dato che $2(-4) - 4^2 = -24 < 0$, il punto $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ è un punto di sella.