ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2018-2019

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

24 giugno 2019

TEMA 1

IAM: es 1, 2, 3, 4. IAM1, v.o.: es 1, 2. IAM2, v.o.: 3, 4

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \log |x|.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie o periodicità ed il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f; calcolare i limiti di f' se significativi.

(d) Calcolare la derivata seconda di f e determinare gli intervalli di concavità e convessità con eventuali punti di flesso.

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento

(a) Dato che $|x| > 0$ per ogni $x \neq 0$, $\log |x|$ è ben definito per ogni $x \neq 0$. Dunque il dominio di f è $x \neq 0$, cioé $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Notiamo inoltre che $f(-x) = f(x)$, dunque la funzione è pari. La funzione non presenta periodicità. Dato che la funzione è pari potremmo studiarla solo su $x > 0$, e poi estenderla per simmetria. Noi la svolgeremo anche per gli $x < 0$.

(b) Per il limite notevole $\lim_{x\to 0^+} x^a \log x = 0$ per ogni $a > 0$, basato sul confronto tra infiniti, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \log |x| = 0 = \lim_{x\to 0^-} x^2 \log |x|.$$

Dunque $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile, e possiamo estendere la funzione in $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$.

Inoltre

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Dunque la funzione non ha asintoti orizzontali. Per determinare eventuali asintoti obliqui calcoliamo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \log |x|}{x} = \lim_{x\to +\infty} x \log |x| = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 \log |x|}{x} = \lim_{x\to -\infty} x \log |x| = -\infty.$$

La funzione non ha asintoti obliqui.

(c) La funzione è continua nel suo dominio, e la funzione estesa ponendo $f(0) = 0$ è continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata di f, per $x > 0$: in questo caso $f(x) = x^2 \log x$, e si ha

$$f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \log x + x = x(2 \log x + 1).$$

Per $x < 0$ si ha che $f(x) = x^2 \log(-x)$, e dunque

$$f'(x) = 2x \log(-x) - x^2 \frac{1}{-x} = 2x \log(-x) + x = x(2 \log(-x) + 1).$$

Quindi possiamo concludere che $f'(x) = x(2 \log |x| + 1)$. La funzione è derivabile in tutto il suo dominio.

Notiamo inoltre che, sempre per il limite fondamentale $\lim_{x \to 0^+} x^a \log x = 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x \log |x| + x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} (2x \log |x| + x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x).$$

Quindi $f'(0) = 0$. La funzione estesa è derivabile (con derivata continua) su tutto $\mathbb{R}$.

Studiamo il segno di f' per $x > 0$. Ricordiamo che se $x > 0$, allora $f'(x) = x(2 \log x + 1)$ e dunque $f'(x) > 0$ se e solo se (quando $x > 0$), $\log x > -\frac{1}{2}$, cioé $x > e^{-1/2}$. Analogamente per $x < 0$, dato che $f'(x) = x(2 \log(-x) + 1)$ si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se (quando $x < 0$), $\log(-x) < -\frac{1}{2}$, cioé $-x < e^{-1/2}$, e quindi $x > -e^{-1/2}$.

Riassumendo

$$f'(x) > 0 \text{ (e quindi } f \text{ è crescente)} \quad \text{in } (-e^{-1/2}, 0) \cup (e^{-1/2}, +\infty),$$

mentre $f'(x) < 0$ (e quindi f è decrescente) altrove.

Il punto $x = 0$ è un punto di massimo locale, mentre i punti $x = -e^{-1/2}, x = e^{-1/2}$ sono punti di minimo locale (ricordiamo che la funzione è pari).

La funzione non ha massimo assoluto, dato che ha limite $+\infty$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$, mentre ha minimo assoluto, che è raggiunto nei punti $x = -e^{-1/2}, e^{-1/2}$.

(d) Ricordando che $f'(x) = x(2 \log |x| + 1)$ si ha che

$$f''(x) = \begin{cases} 2 \log x + 1 + x 2 \frac{1}{x} = 2 log x + 3 & x > 0 \\ 2 \log(-x) + 1 + x(-2 \frac{1}{-x}) = 2 \log(-x) + 3 & x < 0. \end{cases}$$

Dunque $f''(x) = 2 \log |x| + 3$. Osserviamo che il dominio di f'' è $x \neq 0$.

Inoltre $f''(x) > 0$ se e solo se $\log |x| > -\frac{3}{2}$ e dunque $|x| > e^{-3/2}$, cioé $x < -e^{-3/2}, x > e^{-3/2}$. Otteniamo dunque

$$f''(x) > 0 \text{ (e quindi } f \text{ è convessa)} \quad \text{in } (-\infty, -e^{-3/2}) \cup (e^{-3/2}, +\infty),$$

e concava altrove.

I punti $x = -e^{-3/2}, x = e^{-3/2}$ sono punti di flesso.

(e) Per il grafico vedere la figura sotto.

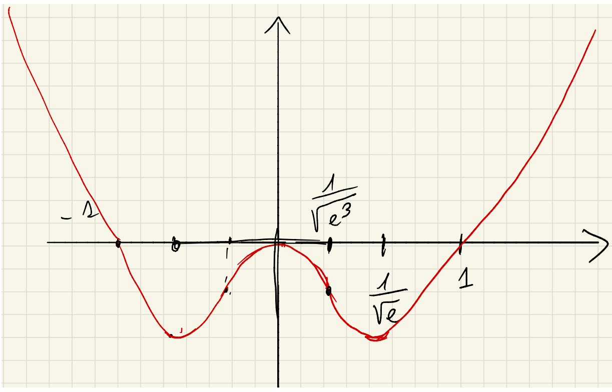
Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 2 + x}{x^2 + 2} \right)^x.$$

Svolgimento

Osserviamo che

$$\left(\frac{x^2 + 2 + x}{x^2 + 2} \right)^x = e^{x \log \left(\frac{x^2+2+x}{x^2+2} \right)}.$$



Inoltre notiamo che

$$x \log \left(\frac{x^2 + 2 + x}{x^2 + 2} \right) = x \log \left(1 + \frac{x}{x^2 + 2} \right).$$

Se $x \to +\infty$, si ha che $\frac{x}{x^2+2} \to 0$ e dunque $\log \left(1 + \frac{x}{x^2+2}\right) = \frac{x}{x^2+2} + o\left(\frac{x}{x^2+2}\right)$. Sostituendo si ha che

$$x \log \left(\frac{x^2 + 2 + x}{x^2 + 2} \right) = x \frac{x}{x^2 + 2} + xo \left(\frac{x}{x^2 + 2} \right) = \frac{x^2}{x^2 + 1}(1 + o(1)) \to 1 \qquad x \to +\infty.$$

Dunque $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+2+x}{x^2+2} \right)^x = e^1 = e$.

Esercizio 3 (8 punti)
a)Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 2}} \, dx.$$

b) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{3x^2 + 2}} dx.$$

Svolgimento
a) Operiamo la sostituzione $t = 3x^2 + 2$. Allora $dt = 6xdx$, $t = 2$ se $x = 0$ e $t = 5$ se $x = 1$. L'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 2}} \, dx = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{6x}{\sqrt{3x^2 + 2}} \, dx = \frac{1}{6} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} t^{-\frac{1}{2}+1} \right]_2^5$$

$$= \frac{1}{6} 2(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}.$$

b). Osserviamo che $\frac{x^\alpha}{\sqrt{3x^2+2}} > 0$ in $(1, +\infty)$ e inoltre

$$\frac{x^\alpha}{\sqrt{3x^2 + 2}} = \frac{x^\alpha}{\sqrt{x^2(3 + 2/x^2)}} = \frac{x^\alpha}{\sqrt{x^2}\sqrt{3 + 2/x^2}} \sim \frac{x^\alpha}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{x^{1-\alpha}\sqrt{3}} \qquad x \to +\infty.$$

Per il principio del confronto asintotico l'integrale converge se e solo se $1 - \alpha > 1$, cioé se e solo se $\alpha < 0$.

Esercizio 4 (8 punti)
a) Determinare il $k \in \mathbb{N}$ tale che $\quad \sin\left(\frac{3n+1}{n^3+n}\right) \sim \frac{3}{n^k}$ per $n \to +\infty$.
b) Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \sin\left(\frac{3n+1}{n^3+n}\right)$$

converge.

Svolgimento
a) Osserviamo che $\frac{3n+1}{n^3+n} = \frac{n(3+1/n)}{n^3(1+1/n^2)} = \frac{3(1+o(1))}{n^2(1+o(1))} = \frac{3}{n^2}(1+o(1)) \to 0$. Inoltre ricordiamo che se $x \to 0$, $\sin x \sim x$. Quindi

$$\sin\left(\frac{3n+1}{n^3+n}\right) = \sin\left(\frac{3}{n^2}(1+o(1))\right) \sim \frac{3}{n^2}.$$

In conclusione $k = 2$.
b) Osserviamo che $0 < \left(\frac{3n+1}{n^3+n}\right) < \pi$ per ogni $n \geq 1$ e dunque la serie è una serie a termini positivi. Per la parte a), si ha che

$$n^\alpha \sin\left(\frac{3n+1}{n^3+n}\right) \sim n^\alpha \frac{3}{n^2} = \frac{3}{n^{2-\alpha}}.$$

Dunque per il principio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $2 - \alpha > 1$, cioé se e solo se $\alpha < 1$.